



BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOV. APMIS

kat karny
56567

1 56568 P

Mag. St. Dr.

MXIV⁹
27+28



Matern. pol. 1238.

Armar. 12.
C.

A. 38.

pp. Bernardinus Vitruv.

1886. VI. 3.

Deu

WIII $\frac{7}{15}$

M

W

loc
ron
ob

AA
&

Ar

PRÆLECTIONES MATHEMATICÆ

Ex

WOLFIANIS ELEMENTIS
A D O R N A T Æ,

atque sic

Usui AUDITORUM MATHESEOS
A C C O M O D A T Æ;

Ut quæ ibi prætermiffa, vel in alium lo-
cum rejecta desiderari poterant à Ty-
ronibus, adjicerentur; Quæ verò
vel obscuritatis, vel prolixitatis
accusari solebant, dilucidius
& brevius exponerentur.

à P. JACOBO NAKCYANOWICZ S. J.

AA. LL. & Philosophiæ Doctore, in Academia
& Universitate Vilnensi Publico ac Ordinario
Matheseos Professore

TOMUS PRIMUS

Qui commentationem de Methodo Mathematica A-
rithmeticam, Geometriam, Trigonometriam Pla-
nam & Analysim complectitur.

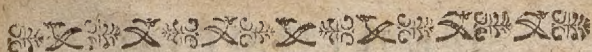
V I L N Æ

Typis S. R. M. Academicis

Annò 1761.

56568
I

ut
Non
bene

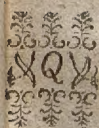


Illustrissimo & Excellentissimo

DOMINO
MICHAELI
POCIEY

Præfecto Rohaczewiensi

Zyzmorensi &c. &c.

 *Uae mihi causam praeberunt IL-*
LUSTRISSIME PRÆFECTE,
ut Academicas praelectiones Tuo inprimis
Nomini inscriptas vellem, fuerunt grata
beneficiorum memoria, avita generis No-

A2

bili-

DEDICATIO.

*bilitas cum praeclaris in Rempublicam
 meritis conjuncta, eximia Tua rerum plu-
 rimarum notitia, atque incredibile in scien-
 tias, bonasque artes omnes studium. Si
 quam bene es de nobis meritus, pluribus
 declarare vellem, longior, quam ratio haec
 scribendi patitur, esse deberem. Res mu-
 saei nostri Astronomicae Tua liberalitate
 amplificatae meritorum erga nos Tuorum
 magnitudinem satis aperte declarant, ne-
 que sinent unquam, ut ea temporis vetu-
 stas aliquando e Mathematicorum animo tol-
 lat. Qua verò Nominis claritate inter Prin-
 cipes Regni nostri Familias luceas, ne-
 mo est, nisi peregrinus atque in annalium
 monumentis omnino hospes, qui id ullo
 modo ignorare possit. Quare pulcherri-
 ma illa Domus POCIEJORUM omitto
 Decora, neque Clarissimos belli DUCES,
 neque ILLUSTRISSIMOS PALATI-
 NOS, neque alios plurimos pacis belliq;
 Ministros commemorabo, vivam eorum in
 ALEXANDRO Trocensiu Palatino, LU-
 DOVICO castrorum, LEONARDO vi-
 gilum Magni Ducatus Lithvaniae Prae-
 fectis,*

DEDICATIO.

fecis, atque in Te VIR ILLUSTRIS-
 SIME imaginem intuemur. Et quamvis
 alius aliter in Republica administranda oc-
 cupatus sit, id tamen cuique semper propo-
 situm est, ut cum omnibus utilitati, Rei-
 publicae sine intermissione sit emolumento.
 Jam singularem illam Tuam erga bona-
 rum artium studia beneficentiam & amo-
 rem equis maximum in Te semper fuisse
 non videat? cuius vita omnis, fortuna ac
 dignitas cum optimis disciplinis earumque
 tutela conjuncta fuit. Id non amplissimum
 modo hoc nostrum Poloniae Regnum,
 verum etiam nationes exterae, quas inter
 Eruditissimae Galliarum Regiones primum
 sibi locum vendicant, testificantur. Ad Te
 igitur ILLUSTRISIME PRÆFE-
 CTE VIRUM & Musis ita amicum, &
 generis splendore summum, & scientiarum
 laude adeo insignem disciplinae Mathemati-
 cae, quas praecipuo semper loco habes,
 jure quodam suo omnino pertinere mihi vi-
 debantur; quas cum Tuo Illustrissimo No-
 mine dignas existimas, illud profecto even-
 turum confirmo, ut, postquam Illustrissimam
 Domum

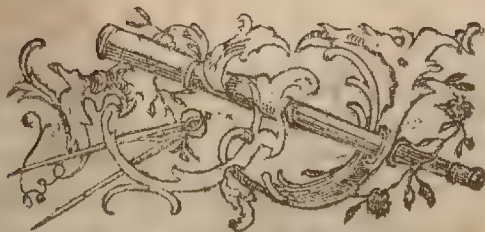
DEDICATIO.

Domum Tuam maximis auctam dignitatibus celebrari ab hominibus videris, Ipse in ea Princeps Eruditorum literarum monumentis æternum exorneris. Æquum enim est, ut summa omnia ad illos perveniant, qui nihil omnino agunt, quod ad communem Reipublicae felicitatem non referant, nec literae eos mori sinant, quorum beneficio id acceperunt, ut florent quotidie magis, nec ulla temporis circumscriptione terminarentur.

Illustrissimæ
ac Excellentissimæ
Dignitatis Tuae

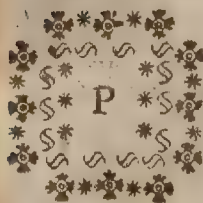
Observantissimus cultor
Jacobus Nakcyanowicz
e Societate JESU.

Vilnae 1761.
Julii 21.



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.



¶ Exiguus est eorum nu-
merus, qui Geometriæ pre-
tium suum statuunt: noti-
one enim delusi cum Arte
Agrimen-

PRÆFATIO

agrimensoria eam pessimè confundunt, nec ea animo ipsorum obversatur idea, quam nomen tam augustum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis distinctæ fundamenta jacet Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in scientiis, quàm in artibus ejus sit usus. Equidem ob Problemata, quorum resolutionem trado, nonnisi ad locorum distantias, variorumq; objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumq; molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hìc repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam superius (a) dicta sunt. Ne verò hoc fructu careret Geometriæ studium, à rigore in demonstrando recedendum minimè fuit. Hinc definitio, quæ vulgò definiri non solent, & passim demonstro, quæ sine probatione ab aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus. Sed sufficit eum proba-

(a) *In Comment: de Meth: Mathem.*

PRÆFATIO.

ndunt,
idea,
re de-
is di-
a cum
scien-
Equi-
olutio-
ntias,
agro-
; mo-
; con-
s elu-
partes
quæ
llectu
d hoc
à ri-
inimè
i non
e pro-
idem
uperi-
eum
ba-

probari peritis; & quod majus est, metho-
dum nostram præstare, ne extra Mathe-
sin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in
quos plerumq; omnes hætenus incidisse,
supra etiam (b) annotavimus. EUCLI-
DES & ejus exemplò hætenus omnes ex
principio congruentiæ solo demonstrarunt
omnia: sed cū ingeniosissimus LEIBNITIUS
similitudinis notionem mecum communi-
caret, atq; moneret multum ejus in Geo-
metria esse usum; ego verò meditatus am-
plissimum deprehenderem; similitudinis
principium in Geometriam introducere
nullus dubitavi. Multa igitur ex eo à me
facillimè demonstrata deprehendes, quæ
aliàs ex principio congruentiæ nonnisi per
ambages demonstrari solent. Nec inju-
cundum arbitror, quòd figurarum constru-
ctiones inter principia demonstrandi nunc
obtineant locum, quæ aliàs praxi tantum
inserviebant. Tyrones, definitionibus e-
volutis, neglecta demonstratione Proble-
mata solvant. Hoc labore perfuncti ex
Theorematum hypothesibus figuras con-
struant

A2

(b) *L. Cit.*

PRÆFATIO.

struant, & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio. (c) Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui verò mentis acie pollent, illamq, diu possunt habere attentam, difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant.



ELE-

(c) *In Scholio Theor: 7. §. 142.*

(I.)



ELEMENTA GEOMETRIÆ

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.



CAPUT I.

DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ.

DEFINITIO I.



§ I.

Geometria est scientia extensorum, quatenus terminata sunt; hoc est linearum, superficialium, & solidorum.

SCHOLION.

2. *Non immeritò ergo Geometriam TAC-
QUETUS scientiam nobilissimam, antiquissi-
mam, atque omnis veritatis infallibilem Ma-
gistram appellat propterea, quòd ex simplici-
bus composita, ex apertis obscura legitimò
ratiociniò eliciat; ut ita demum admiranda
Theoremata ab omni humano sensu & co-
gnitione remota incredibili certitudine ac
evidentià innotescant.* *

*Quemadmodum verò Arithmetica (S i,
Arithm.) ita Geometria in Theoreticam &
Practicam dividitur. Qui priorem vel utram-
que simul complecti-ur, Geometra dicuntur.
Qui autem posthabita priore, posteriori soli,
agris præsertim metiendis dant operam, Agri-
mensores appellantur. Nec injurià qui item;
sicut enim politores lentium veri Optici, ita isti
sine solida theorià veri Geometra nominandi
non sunt.*

DEFINITIO II.

3. *Congruere dicuntur, quorum iidem ter-
mini esse possunt. Nempe congruentia est
coincidentia terminorum.*

DEFINITIO III.

4. *Eundem situm habere dicuntur, inter
quæ idem extensum poni potest.*

DEFINITIO IV.

5. *Punctum est, quod undiquè se ipsum*
termi-

* *In Præfat: ad Elem: Geom:*

terminat; seu quod non habet terminos alios à se distinctos.

COROLLARIUM.

6. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§ 3.); nec ullas habet partes.

SCHOLIUM.

7. Hinc EUCLIDES punctum est, inquit, cujus pars nulla est. *Ut ut tale imaginari quidem, non pingere valeamus. In praxi autem Geometrica summo studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.*

DEFINITIO V.

8. Linea omnis: Curva scilicet & recta Tab. I.
describitur, si punctum ab uno termino A ad Fig. I.
alterum B moveatur.

COROLLARIUM I.

9. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B, secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est. (§ 5.)

COROLLARIUM II.

10. Quoniam punctum partes nullas habet, (§ 6.), linea nec lata, nec profunda esse potest, sed tantum longa.

SCHOLIUM.

II. Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una à reliquis actu separari possit, necessarium tamen est, ut unam absque reliquis eg. altitudinem turris absque latitudine & profunditate consideremus.

DEFINITIO VI.

Tab: I.
Fig: I.

12. *Distantia* est linea brevissima inter duo E.g. inter A & B si ducatur linea per C.

DEFINITIO VII.

13. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcunque est toti similis. Describi concipitur, si punctum A ad aliud B eadem directione moveatur.

Curva vero AXZB, cujus pars quæcunque AX toti dissimilis. Describitur, si punctum A ad aliud B diversa directione moveatur.

COROLLARIUM.

14. Lineæ igitur rectæ non differunt, nisi quantitate (S. 23. Arithm.)

POSTULATUM I.

15. A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.

POSTULATUM II.

16. Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.

DEFI-

DEFINITIO VIII.

17. Metiri idem est, ac quantitatem aliquam pro unitate assumere, ac aliarum homogenearum rationem ad eandem exprimere.

Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *mensura dicitur*.

SCHOLION.

18. Hæc Definitio latior praxi respondet. Strictius EUCLIDES mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri sit æqualis; quam in Arithmetica partem aliquotam diximus §. 25.

DEFINITIO IX.

19. Hinc *mensura linearum* est linea recta arbitrarie longitudinis in partes minores pro libitu dividenda, & subdividenda. Dividitur autem à Geometris in 10 partes æquales, quæ pedes vocantur. Unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 digitos. *Digitus* in 10 lineas, & ita porro.

SCHOLION I.

20. *Mensura longitudo* & divisio non eadem est ubivis Gentium. Chorda (scilicet) qua in nostro Regno utuntur Geometræ, constat Ulnis 75 five pedibus 150. Petic-

ca (pret) $7 \frac{1}{2}$ Ulnis, five pedibus 15. In

exteris Regionibus passim utuntur *Decempeda*;

peda; sed pes, ex quibus componitur, pro varietate Regnorum diversus est. Aliquas celeberrimum mensurarum varietates expressimus in *Arithmetica* §. 377. Dividitur verò communi nostratibus Geometris divisione, Chorda in 10 perticas, Pertica in 10 alias perticulas (*pręcik*); perticula in 10 lineas (*lawka*) linea in 10 lineolas (*laweczka*) & ita porro.

SCHOLIUM II.

21. Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit SIMON STEVINUS Angliæ oriundus in Academia Exfordiensi Professor circa annum C. 1595. teste ipsius Geometriæ practicæ exempli REGIOMON-

TANI. Mensuræ decimales loco 5378 interdum commodè scribuntur 5. 378. (§ 349 Arithm.) R. P. FRANCISCUS NOEL S. J. Autor est divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi. (a)

DEFINITIO X.

22. Superficies est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa. Oriri concipitur, si una linea alteri insitens quopiam motu moveatur.

SCHOLIUM.

23.

(a) In observationibus Mathematico-Physicis in India & China sæclis c. 7. p. 104. & sequ.

23. *Definitur in genere superficies, ut conveniat superficiei rectilineæ, curvilinæ, & mixtilinæ. Si enim linæ rectæ insistat altera recta, & motu uniformi, sive eadem directione moveatur, nascetur superficies rectilinea; si diversa directione moveatur, erit superficies mixtilinea. Si curvæ insistat curva, aut recta, directione tamen diversa moveatur, describetur etiam superficies curvilinea.*

COROLLARIUM.

24. *Termini itaque superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt linæ, secundum profunditatem ipsamet sui terminus existit. (§. 13.)*

DEFINITIO XI.

25. *Perimeter est continuum, quo aliud continuum terminatur.*

DEFINITIO XII.

26. *Figura est continuum perimetrò terminatum.*

SCHOLIUM.

27. *Dicitur tam de superficiebus, quàm de solidis; in priori casu perimetri sunt linæ, (§. 23.) in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIII.

28. *Figura rectilinea est, cujus perimenter*

ter ex lineis rectis: *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis: *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat. Quomodo oriatur, patet ex §. 23.

DEFINITIO XIV.

29. *Latus Figuræ* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XV.

30. *Planum*, seu *figura plana* est, si è quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem punctum rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVI.

Tab: I.
Fig: 2.

31. *Circulus* est figura plana linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, (quod centrum vocari solet) ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa, *Peripheria* dicitur. *Chorda* verò, recta AB à peripheria ad peripheriam ducta.

Diameter AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta dicitur *Semidiameter*, item *Radius*.

COROLLARIUM.

32. Radii ergo unitis circuli inter se æquales sunt: & si fuerint radii æquales, circuli etiam æquales sunt.

DEFI-

DEFINITIO XVII.

33. *Arcus* est pars quæcunque peripheriæ AFB. *Gradus* vero est pars ejusdem peripheriæ trecentesima sexagesima.

Quilibet gradus in 60 minuta prima, minutum quodlibet primum in 60 secunda &c. subdividitur. EUCLIDES *arcum* etiam peripheriam vocat.

COROLLARIUM.

34. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur (§. 33.); gradus circuli majoris sunt majores gradibus circuli minoris.

SCHOLIUM.

35. *Scrupula graduum* sunt fractiones sexagesimales (§. 364 *Arithm*); apicibus notantur suis (§. 366. *Arithm*;) uti decimales suis (§. 21.) Eg. Gradus 3, minuta 25, se-

cunda 16. scribas $3^{\circ} 25' 16''$. Ægyptiis ejusmodi exdivisio debetur propter facilitandum calculum astronomicum. Sed utinam decimalis communi consensu exdivisio introduceretur, quemadmodum apud nonnullos Astronomos videre est.

DEFINITIO XVIII.

36. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Excentrici*, qui centra diversa.

Tab. II.

Fig. 33.

DEFI-

DEFINITIO XIX.

- Tab. I. 37. *Segmentum circuli*, est pars ipsius
Fig: 2. AFBA arcu. AFB. & chordâ AB comprehensa. Dicitur, *Segmentum majus*, quod semicirculô majus est, *minus*, quod semicirculô minus.

DEFINITIO XX.

- Tab. I. 38. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehensa. Si fuerit 4ta pars circuli; dicitur *Quadrans*. Si sexta; *Sextans* &c.

DEFINITIO XXI.

- Tab. I. 39. *Recta* HI circulum in L tangit, sipli ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat.

- Tab. I. *Circulus* verò circulum *intus tangit*, si huic occurrens, totus intra hunc; *extus verò tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadat.

COROLLARIUM I.

- Tab. I. 40. *Recta* CL ex centro C ad contactum L ducta est radius circuli (§. 31.).

COROLLARIUM II.

- Tab. I. 41. Circuli ergo se extus tangentes in L, diversa centra C & C habent, adeoque excentrici sunt (§. 36.).

DEFI-

DEFINITIO XXII.

42. *Linea AB* lineam *CD* secat in *E*, si eam dirimit in partes *CE* & *ED* cis, & ultra ipsam sitas.

Tab: I.

Fig: 6.

COROLLARIUM I.

43. Si recta *MN* circulum in *o* fecet, pars ejus *oN* intra circulum cadit (§. 31.).

Tab: I.

Fig: 7.

COROLLARIUM II.

44. Si circulus circulum secat, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 31.) pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadit.

Tab: III.

Fig: 43.

DEFINITIO XXIII.

45. *Angulus* est duarum linearum *AB* & *AC* in uno puncto *A* concurrentium mutua inclinatio: lineæ *AB* & *AC* dicuntur *Cru-ra*, punctum concursus *A* est *vertex anguli*.

Tab: I.

Fig: 9.

SCHOLION.

46. *Angulus* vel litera una *A*, vertici ejus adscripta, vel tribus literis *BAC* ita, ut vertici adscripta medio loco ponatur, indicatur. Sæpè angulum designat litera minor veluti *x* eidem inscripta. Utimur verò angulis ad linearum situm determinandum.

DEFINITIO XXIV.

47. *Angulus ACB* insistere dicitur lineæ *AB*, Tab: I.

Fig. 1. AB, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXV.

Fig. 2. 48. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, intra crura ejus AC, & AB quocunque radio descriptus.

SCHOLIUM.

49. Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE (§. 33.) id quod ex ratione arcus ad peripheriam cognoscitur. (§. 106. *Arithm.*) Hoc est si fuerit arcus DE graduum 32, erit etiam angulus x graduum 32.

DEFINITIO XXVI.

Tab. 1. Fig. 10. 50. *Anguli contigui* EGH, & HGJ sunt, quorum idem est vertex G, & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXVII.

Fig. 6. 51. *Rectæ lineæ* AE & EB in *directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existant.

DEFINITIO XXVIII.

52. *Angulus deinceps positus* AGC dicitur, si unum crus ejus AE, vel CE protendatur in B, vel D.

CO

COROLLARIUM.

53. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, non tamen è contra (§, 50.)

DEFINITIO XXIX.

54. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est.

Tab: I.

Fig: 11.

DEFINITIO XXX.

55. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis.

Fig: 6.

Angulus acutus AEC est obliquus minor recto.

Angulus obtusus AED est obliquus recto major.

DEFINITIO XXXI.

56. *Anguli verticales* o E & x sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED.

Fig: 6.

DEFINITIO XXXII.

57. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB à diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, anguli, quos cum ea efficiunt x & y dicuntur *alterni*.

Tab: I.

Fig: 12.

DEFINITIO XXXIII.

58. Si verò lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B sed ab eadem plaga occurrant; *Anguli*, quos cum ea efficiunt

B

effici.

efficiunt u & y item z & y dicuntur oppositi; & quidem u dicitur *oppositus externus*, z verò *oppositus internus* ipsius y .

DEFINITIO XXXIV.

Tab: 1.

Fig: 13.

59. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *angulus in segmento*.

COROLLARIUM.

60. Intercipitur adeò à duabus chordis AB & BD (§. 31. & 45.) atque arcui AD insitit (§. 47.)

DEFINITIO XXXV.

61. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura verò AC & CD in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

62. Mensura itaque ejus est arcus AFD. (§. 48.)

DEFINITIO XXXVI.

Tab: 1.

Fig: 14.

63. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est; crura verò HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

64. Insitit ergo arcui HXI. (§. 47.)

DEFI.

DEFINITIO XXXVII.

65. *Angulus contactus HLM* est, quem arcus circuli *ML* cum tangente *HL* ad contactum efficit.

Tab: I.
Fig: 3.

DEFINITIO XXXVIII.

66. *Angulus segmenti MLH* vel *MLI* est, quem chorda *ML* cum tangente *HL* ad contactum efficit.

Tab: I.
Fig: 3.

DEFINITIO XXXIX.

67. *Linea perpendicularis KL* aut *normalis* est ad alteram *LM*, si cum ea angulum rectum efficiat.

Tab: I.
Fig: II.

COROLLARIUM.

68. Si igitur *LK* ad *NM* perpendicularis, anguli ad *L* deinceps positi æquales sunt, (§. 54.) & e contra, si anguli ad *L* æquales, erit *LK* ad *NM* perpendicularis.

DEFINITIO XL.

69. *Linea AB* est ad alteram *AC* obliqua, si cum ea efficit angulum obliquum.

Tab: I.
Fig: 9.

DEFINITIO XLI.

70. *Linea OP* parallela est alteri *QR*, si ubique eandem ab ea distantiam servet.

Tab: I.
Fig: 12.

COROLLARIUM.

B2 71.

71. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLII.

Tab: I.

Fig: 15.

72. Lineæ divergentes ON & QP sunt, quarum distantia continuò fit major; Convergentes è contra.

DEFINITIO XLIII.

73. Opponi dicuntur, è quorum uno ad alterum perpendicularis duci potest.

DEFINITIO XLIV.

74. Triangulum est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLV.

Tab: I.

Fig: 16.

75. Triangulum æquilaterum ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere figura æquilatera dicitur, cujus latera singula inter se æqualia.

DEFINITIO XLVI.

Tab: I.

Fig: 17.

76. Triangulum æquicrurum sive isosceles DEF est, quod duo latera æqualia habet.

DEFINITIO XLVII.

Tab: I.

Fig: 18.

77. Triangulum Scalenum ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inæqualia.

DEFI-

DEFINITIO XLVIII.

78. *Triangulum rectangulum KLM est,* Tab: I.
cujus angulus-K rectus est. Fig: 19.

DEFINITIO XLIX.

79. *Triangulum obtusangulum PNO est,* Fig: 20.
cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO L.

80. *Triangulum obliquangulum est,* *cujus*
singuli anguli sunt obliqui. Acutangulum, *cujus*
anguli sunt acuti.

DEFINITIO LI.

81. *Hypothenuſa MI. est latus in triangu-* Tab: I.
lo rectangulo, angulo recto K oppositum. Fig: 19.

DEFINITIO LII.

82. *Catheti sunt latera trianguli MK &*
KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LIII.

83. *Figura quadrilatera est, cujus perime-*
ter ex quatuor lateribus constat. Rectangu-
la dicitur, si anguli ejus singuli sint recti: obli-
quangula, si obliqui.

DEFINITIO LIV.

84. *Quadratum ABDC est figura quadri-* Tab: II.
latera, æquilatera, rectangula. Fig: 21.

DEFINITIO LV.

Tab: II. 85. *Rhombus EFHG* est figura quadri-
Fig: 22. latera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LVII.

Fig: 23. 86. *Rectangulum* five *oblongum MLKI* est
figura quadrilatera, rectangula, latera opposi-
ta ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LVIII.

Tab: II. 87. *Rhomboides NOPQ* est figura qua-
Fig: 24. drilatera, obliquangula, latera opposita OP &
NQ, item ON & PQ æqualia habens.

COROLLARIUM.

88. Cum in Quadrato, Rhombo, Rhomboides, Rectangulo latera sint lineæ rectæ, in rectis autem lineis sola ratio directionis habenda, (§. 13.) siquidem latera opposita sunt æqualia, erunt etiam parallela. (§. 71.)

DEFINITIO LVIII.

89. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela.

COROLLARIUM.

90. Ergo Quadratum, Rhombus, Rectangulum, Rhomboides sunt parallelogramma. (§. 89.)

DE-

DEFINITIO LX.

91. *Trapezium RTUS* est figura quadrilatera non parallelogramma.

Tab: II.

Fig: 25.

Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera opposita sunt parallela, quæ aliàs *Trapezium parallelarum basium* dici solet. Figura verò cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* ipsdem dicitur.

DEFINITIO LXI.

92. *Figura polygona*, seu multilatera *AB T.VIII.IX CDE* vel *ABCDEGA* est, cujus perimeter ex pluribus, quàm quatuor lateribus componitur. Fig: 105.

Quod si latera fuerint quinque, *Pentagonum*, si sex: *Hexagonum*, si septem: *Heptagonum*, si octo *Octogonum* &c. dicitur.

DEFINITIO LXII.

93. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXIII.

94. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

Tab: VIII.

Fig: 105.

DEFINITIO LXIII.

95. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera, & æquiangula.

Tab: IX.

Fig: 110.

B4

DE-

DEFINITIO LXIV.

96. *Figura inter se æquilatæ* dicuntur, si singula latera unius fuerint æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXV.

97. *Figura inter se æquiangula* sunt, si singuli anguli homologæ unius, singulis angulis homologis alterius sint æquales.

DEFINITIO LXVI.

98. Dicuntur verò tam *anguli*, quàm *lateræ homologæ*, si eundem ordinem à primo in utraque figura servant.

DEFINITIO LXVII.

Tab: II. 99. *Diagonalis PN* est recta ex vertice
Fig: 24. anguli unius P in verticem alterius N ducta

DEFINITIO LXVIII.

Tab: I. 100. *Basis figura* est perimetri pars im
Fig: 19. KL.

COROLLARIUM.

101. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXIX.

Tab: I. 102. *Vertex figura M* est vertex anguli
Fig: 19. basi KE oppositus. DEFI-

DEFINITIO LXX.

103. *Altitudo figura*, est distantia verticis à basi.

DEFINITIO LXXI.

104. *Figura ABCDE* dicitur circulo in-Tab: VIII.
scripta, si peripheria per vertices singulo- Fig: 104.
rum angulorum ipsius transit, tuncquē cir-
culus figuræ dicitur *circumscriptus*.

DEFINITIO LXXII.

105. *Figura abcde* dicitur circulo circum Fig: 104.
scripta, si singula ejus latera peripheriam
tangant; tuncquē *circulus* figuræ dicitur in-
scriptus.

DEFINITIO LXXIII.

106. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus
latus chordæ, perticæ, decempedæ &c. æqua-
le, diciturquē *chorda quadrata*, & in per-
ticas, decempedas quadratas, sicut *pēs qua-*
dratus in digitos quadratos &c. dividitur.

DEFINITIO LXXIV.

107. *Eodem modo determinari* dicuntur, si
data, per quæ unum determinatur, fuerint si-
milis datis, per quæ determinatur alterum,
& utrobiquē ex datis similibus per easdem
regulas reliqua determinantur.

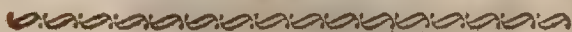
COROLLARIUM.

108. Quæ itaquē eodem modo determinan-
tur

tur, in iis coincidunt ea, per quæ à se discerni debent, adeoque similia sunt. (S. 21. *Arith.*)

DEFINITIO LXXV.

Tab: II. 109. *Libella est instrumentum, quò invenitur linea horizonti vel parallela vel perpendicularis.*
Fig: 30.



CAPUT II.

DE PROPOSITIONIBUS QUIBUS- DAM FUNDAMENTALIBUS.

PROBLEMA I.

110. A dato puncto *A* ad datum punctum *B* lineam rectam ducere.

RESOLUTIO.

1mo. *In Charta.*

Tab: II. Fig: 28. Linea recta ducitur juxta regulam *EF* ad puncta data *A* & *B* applicatam, graphio *HI*, pennâ aut plumbagine.

2do. *In ligno vel Saxo.*

Recta delineatur etiam sine regula, si filum cretâ, vel ceruisâ delibutum punctis datis *A* &

discer.
Arith.)

& B apprimatur, & mediò digitis prehensò
fursum trahatur, moxquè iterum demittatur.

3tio. In Campo.

inve-
erpen-

Recta designatur per baculos in punctis da-
tis beneficio libellæ ad horizontem perpen-
diculariter defixos, quorum summitati mucini-
um aut folium chartæ mundæ alligatur, si è
longinquo videri debeant.

Fig: 30.

S C H O L I O N.

US-
S.

unctum

III. Cùm regula orichalcea & argentea
chartam facillè nigrent, utendum est ebeninis,
aut aliis ex lignis indicis: Pennæ optimæ sunt.
quæ ex corvorum alis evelluntur, propterea quod
aferinis duriores, lineis subtilioribus & pu-
rioribus ducendis inserviant. Utendum verò
atramento Sinico, tum quia commune ob cor-
rosivitatem vitrioli chalybeam graphii cuspi-
dem arrodit, tum quia Sinicum facilius efflu-
it, & eò lineæ nitidiores ducantur.

Baculi cuspidè ferrea interdum muniuntur.

P R O B L E M A II.

EF ad
io HI,

III. Duobus baculis in solo defixis terti-
um, vel plures in eadem recta cum iis insige-
re.

R E S O L U T I O.

Baculus ita insigatur, ut oculò in unum
directò cæteri non appareant.

filum
atis A
&

Ratio à luminis rectilinea propagatione
petenda, de qua in opticis.

PRO-

PROBLEMA III.

III. *Lineam Rectam metiri.*

RESOLUTIO.

Tab: II.

Fig: 31.

Assumatur aliqua mensura (§. 19.) Nimirum pro lineis rectis in charta datis, refecentur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes, cubitos, aut chordas &c. designent; intervallum verò 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur quoties fieri potest. (§. 14.)

Fig: 32.

In Campo utimur catena vel fune canabino vel perticâ in digitos & lineas divisâ. Sufficit autem ultimam mensuram componentem integrum in partes minores dividi eg. Chordæ totius unam perticam, in perticulas, in digitos, lineas &c. Quod si ergo Linea recta metienda AB.

1mo. In Charta.

Tab: II.

Fig: 31.

28.

Ponatur crus circini unum in A, & eoufque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.

Mox circini crus unum in fine decempedæ aut chordæ alicujus eg: in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem mensuræ alterum

attingat egr: 6, erit linea AB, 1° 6. (§. 21.)

2do. In Campo.

I. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 110.) & si ea distantia mensuræ longi-

CAPUT II. DE PROP: QUIBUSD: FUNDAM:

gitudinem superet, constituentur cum iis alii in eadem recta. (§. 112.)

II. Chorda aut alia mensura ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet, (§. 54, 42.) id quod perpendiculò appensò indicatur.

III. Chordis perticæ, perticulæ &c. adnumerentur.

SCHOLIION I.

114. Funes cannabinos humor contrahit, & vires diversæ inæqualiter tendunt. Chordæ itaque ex filis ferreis utendum. Sed optimæ omnium mensura, pertica lignea, aut metallica, utpotè ab inæqualitate extensionis prorsus libera. Quodsi tamen urgente necessitate fune utendum, funiculi (ex quibus conficitur) in gyros contrarios contorquendi, ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, & postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Ita, ne ab humore longitudinis decrementum patiat, providebitur.

Tab: II.
Fig: 32.

SCHOLIION II.

115. Longitudo verò lineæ in mensura quam alia invenitur per regulam trium (§. 387. Arithm:) eg: si queratur: pedes Parisini 186 quot Londinenses faciunt?

PROBLEMA V.

116. Ex dato quovis centro C dato radio quocunque AC, circulum describere.

RESOLUTIO

Tab: II.
Fig: 33.

RESOLUTIO.

imo. In Charta.

I. Collocetur circini crus unum in dato centro C, & aperiatur intervallo radii AC.

II. Moveatur circinus circa centrum C. ita crus alterum peripheriam designabit. (§. 31.)

2do. In solo; & quotiescunque circini apertura tanta fieri non possit, quanta requiritur, pro radio filum, funiculus, aut virga sive lignea sive ferrea fervit.

SCHOLIUM.

Tab: II.

Fig: 34.

117. Si fune aut filo utimur, cavendum est, ne stylus è situ perpendiculari dimoveatur, id quod impedit filum transversum FE, si fuerit $AF = 3$, $AE = 4$, & $FE = 5$. Ratio patet per Theorema Pythagoricum infra demonstrandum.

COROLLARIUM I.

Fig: 33.

118. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quò peripheria alterius cujuscunque, (§. 107.) omnes peripheriæ sunt inter se similes (§. 108.). Eodem modo patet omnes circulos & semicirculos quadrantes, sextantes, &c. inter se esse similes.

COROLLARIUM II.

Tab: I.

Fig: 2.

119. Quoniam ADE \propto AFBE, segmentum scilicet segmento, & peripheria peripheriæ (§. 118), peripheriæ ad peripheriam, segmenta

gmenta ad circulum eandem rationem habent (§. 145. *Arith.*); Peripheriæ & segmenta sunt æqualia (§. 152. *Arith.*). Ergo Diameter dividit tam peripheriam, quam etiam circulum in duas partes æquales.

COROLLARIUM III.

120. Super quavis igitur linea recta AE semicirculus describi potest.

THEOREMA I.

121. Si ex centro C duorum circulorum concentricorum ducantur radii CDA & CEB, tum arcus DE, & BA ad peripherias, tum sectores DCE, & ACB ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.

Tab. II.

Fig. 33.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli sint concentrici per hypoth: idem centrum C habent (§. 36.) & arcus isti, atque sectores eodem modo determinentur (§. 107.); igitur illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (§. 108.), consequenter illi ad peripheriam, hi ad circulos eandem rationem habent. (§. 145. *Arith.*)
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

122. Cum arcus DE & AB intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti sint arcus circulorum concentricorum (§. 36.), ad suas peripherias eandem rationem habent, consequenter sunt inter se, ut
pe-

peripheriæ (§. 148. *Arith.*) Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent, (§. 33.) ipsi quoque eundem continent.

COROLLARIUM II.

123. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcûs ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (§. 49.) perinde est, quocunque radiô arcus iste describatur. (§. 121.)

COROLLARIUM III.

124. Eadem igitur est anguli quantitas si ve crura producantur, siue minuantur.

THEOREMA II.

Tab: I.

Fig: 11.

125. *Anguli recti KLM mensura est quadrans circuli.*

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N, (§. 16.) erit $x = 0$. (§. 54.) sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 120), angulorum x & 0 mensuræ AC & CB sumptæ æquales sunt semicirculo (§. 48.) ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans. (§. 49, 38.)

COROLLARIUM I.

126. Cum quadrans circuli 90° æqualis sit (§. 33.)

(§. 33.) Angulus rectus est 90° (§. 49.).

COROLLARIUM II.

127. Omnes adeò recti sunt inter se æquales (§. 124.), & æqualis recto, rectus est.

COROLLARIUM III.

128. Acutus igitur minor, obtusus major est 90° (§. 55.).

COROLLARIUM IV.

129. Si duo anguli deinceps positi o & E, aut quotcunque ad idem punctum y super eadem recta CD constituentur, describaturque semicirculus *daxb* (§. 116.), ejus mensura erunt duo recti (§. 125.). Duo igitur anguli deinceps positi, aut quotcunque ad idem punctum E super eadem recta CD constituti sunt æquales duobus rectis (§. 85. *Arithm.*). Tab: I.
Fig: 1.

COROLLARIUM V.

130. Anguli igitur deinceps aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ positi simul sumpti sunt æquales 180° (§. 126.).

COROLLARIUM VI.

131. Angulorum deinceps positorum datò uno, alter ignorari non potest; relinquitur nimirum

mirum, si datus ex 180° subtrahatur.

COROLLARIUM VII.

132. Si in campo angulum inaccessum vel obtusum quadrante metimur, si accedi potest, angulus deinceps, illius locò hunc metimur,

ex 180° enim subductus quæsitum relinquit. (§. 131.)

COROLLARIUM VIII.

133. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exactè dimensum esse, si finitâ operatione deinceps positos etiam metiaris; quod si enim ubique prodierit

summa 180° , operatio ritè peracta. (§. 130.)

PROBLEMA VI.

Tab: II.
Fig: 26.

134. *Angulum ACB metiri.*

RESOLUTIO.

Cùm anguli ACB mensura sit arcus DE, (§. 48.) totum negotium est, ut numerus graduum arcui DE competens determinetur,

id quod fit ope semicirculi in 180° exactissimè divisi. &

imo. In Charta,

I. Centrum semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

II. Gradus in arcu DE inter crura anguli AC & CB intercepti numerantur.

2do. In Campo.

I. Instrumentum Goniometricum ita collocatur, ut radius ejus uni cruri anguli, centrum verò vertici ejusdem immineat, *prius obtinetur* collineando per dioptras, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas versus baculum in extremo cruris defixum; *posterius* verò perpendiculum ad centrum instrumenti applicando, aut quod exactius, per sectionem filarem planorum, inferius demonstrandam.

II. Regula circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promoveatur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus collineanti occurrat.

III. Gradus, quem regula instrumento indicat, notetur.

SCHOLIUM I.

135. Semicirculus minor, quò in charta utimur, Instrumentum transportatorium vulgò appellatur. In Campo & circulo integro & interdum quadrante utimur. Pro dimidia parte transportatorii, sive pro quadrante divisio fit juxta decantatum illum versum: in tres (*partes*) in binas, in tres, in quinque secato.

Tab: II.
Fig: 29.

Tab: II.
Fig: 26.

SCHOLIION II.

136. Diameter transportatorii est trium ferme digitorum Rhenanorum, majorum vero Instrumentorum Geometricorum unius pedis, aut qd summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In transportatorio graduum dimidia aut quarta partes sufficiunt, in majoribus dena prima. Angulos in campo instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratè in charta designaturi diametrum transportatoris non multò minorem diametro ejus instrumenti, quò in campo usi sunt, assumunt.

SCHOLIION III.

Tab: II.
Fig: 27.

137. Propter inveniendā minuta prima apponuntur interdum Instrumentis Geometricis arcus concentrici mobiles *ab*, in aliquot partes aliquotas numeri 60 divisi. Quod insigni artificium PETRI NONII Lusitani ita habet:

1mo. Assumitur pars aliquota numeri 60. eg. 15. tot scilicet gradibus respondens arcus goniometrici g. 15.

2do. Dictis gradibus unus præterea additur, ut sint 16.

3tio. 16 isti gradus in arcu concentrico *ab* in tot partes æquales, in quot arcus g 15. dividuntur.

PROBLEMA VII.

138. Invenire minuta prima in Goniometricis Nonianis. RESO-

RESOLUTIO.

I. Arcus mobilis concentricus a b moveatur tandiu, donec initium partis alicujus (nisi fortuito incidat) eg. 8. occurrat lineæ dioptricæ xz.

Tab: II.
Fig: 27.

II. ab 8 usque ad a, donec lineæ utriusque arcus in a & g coincidant, numerentur partes in arcu ab.

III. Dividatur 60. per numerum partium arcus ab; & quotus in nostro casu 4 multiplicetur per a 8.

Dico factum hoc minuta indicare; esse scilicet arcum gz octo graduum, & 32. minutorum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus ab gradu uno, hoc est: minutis 60. (§. 33.) excedit arcum 15. g. partium verò totidem sit uterque per constructionem (§. 137.); si inferatur, uti se habent

partes 15. ad 60: ita una d a ad sua minuta,

invenietur ea 4 (§. 276 Arith.); consequenter cum ab a ad 8 partes octo ex arcu, ab abscindantur per operationem, continebunt eæ præter gradus 8, minuta etiam 32 (§. citt.).
Q. e. d.

vel

Si fuerit arcus concentricus og mobilis per §. 137 exdivisus, prout communiter in sectoribus dioptris instructis, qui Goniometricis apponuntur, videre est, tum eodem modo.

C3 I.

I. Numerentur partes omnes in arcu go,

perqué numerum inventum dividantur 60, ut innotescat, quot minuta ima uni parti debeantur (§. 276 *Arithm.*).

II. Numerentur etiam in arcu eodem 00 partes, usqué lineæ utriusqué arcus ba & og coincident. Demum

III. Per numerum hunc multiplicentur minuta ima inventa uni parti arcus og debita.

Demonstratio eadem cum præcedenti. Difficultas rei ex inspecto sub tempus præstationum ejusmodi quadrante continuo evanesceat.

P R O B L E M A VIII.

139. *Data quantitate anguli ipsum describere.*

R E S O L U T I O.

1mo. *In charta.*

T.I. & II.
F.9. & 26

I. Ducatur recta CB.

II. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincadat.

III. Numerentur gradus dati ab E versus D, & ad gradum ultimum notetur punctum B.

IV. Ducatur recta CA per C & D; erit ACB angulus quæsitus (§. 124.).

2do. *In campo.*

Tab: II.
Fig: 29.

I Collocetur instrumentum Goniometricum per §. 134:

II.

II. Regula circa centrum ad gradum datum promoveatur.

III. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA III.

140. Si recta AB alteram CD secet in E; anguli verticales x & o item y & E sunt aequales.

DEMONSTRATIO.

$$x + y = 180^\circ \quad \left(\begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

$$y + o = 180^\circ \quad (\S. 130)$$

$$\text{Ergo } x + y = y + o \quad (\S 77. \text{ Arith:})$$

$$\text{adeoq; } x = o \quad (\S 81. \text{ Arith:})$$

Eodem modo ostenditur esse $y = E$. Q.e.d.

Tab: I.
Fig: 6.

COROLLARIUM.

141. Si ergo inacceffus x metiri debet, accedi autem potest verticalis o, hunc ejus loco metiri licet.

SCHOLION.

142. Cum Tyrones sub initium studii Mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumptis deductis minus assueti; figuras per data ex hypothesis Theorematum assumpta construere, ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem

C4 ex-

explorare (§. 117. 134.) juvat; ita sensus, & veritas propositionis elucescit, & animus ad demonstrationes genuinas percipiendas excitatur. Cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In demonstratione magis acquiescunt Tyrōnes examine ratiociniis legitime facto, non secus ac Theoria Physica magis satisfaciunt, ubi experimenta eisdem consona deprehenduntur.

THEOREMA IV.

Tab: 1. 143. Omnes anguli x, y, o, E , &c. circa
Fig: 6. idem punctum aliquod E constituti sunt æquales 4. rectis.

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E vertice communis angularum intervallo quocunque Ea circulus (§. 116.); evidens est mensuras angularum omnium simul sumptas ad, db, bz, za , conficere integram circuli peripheriam (§. 48. & 85. *Arithm.*); mensura ergo angularum x, y, o, E , &c. simul sumptorum est integer circulus; sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 125.); Ergo omnes anguli isti sunt æquales quatuor rectis (§. 48.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

144. Omnes itaque anguli circa idem Punctum constituti simul sumpti sunt æquales,

360 (§. 126.). THEO.

THEOREMA V.

145. Quæ sibi mutuò congruunt, eæ & æqualia, & similia sunt.

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuò congruunt, eorum iidem sunt termini (§. 5.). Ergo, unum in locum alterius salva quantitate substituere licet, consequenter æqualia sunt (§. 14. *Arithm.*). Q. erat unum.

Porro, quoniam quæ sibi mutuò congruunt, eosdem terminos habere debent (§. 3.), debent etiam eodem modo determinari, sunt itaque similia (§. 108.). Q. er. alterum.

COROLLARIUM I.

146. Cum itaque, si concipiamus figuram unam super alteram mutuò sibi imponi, quivis angulus angulo. & quodlibet latus homologum lateri pariter homologo congruat; *Figurarum quarumcumque sibi mutuò congruentium RTUS, & rtus anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.*

Tab: II.
Fig: 36.

COROLLARIUM II.

147. Siquidem anguli similes sibi mutuò impositi congruunt, aliàs, per diversam inclinationem non essent similes, quod cum sit absurdum, ut pote contra hypothesim, anguli similes sunt etiam æquales.

THEOREMA VI.

148. Quæ æqualia, & similia sunt, ea sibi mutuò congruunt.

DEMONSTRATIO.

Similia differre non possunt, nisi quantitate (§. 23. *Arithm.*); quare si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 14. *Arith.*).

Jam si mutuò sibi imposita non eisdem terminos haberent, diversitate terminorum differrent; quod cum sit absurdum *per demonstrata*, eosdem terminos habere debent, consequenter sibi mutuò congruunt. (§. 3.) Q. e. d.

COROLLARIUM I.

149. Lineæ igitur rectæ æquales sibi mutuò congruunt. (§. 14.).

COROLLARIUM II.

150. Si rectarum extrema coincidunt, singula puncta unius erunt in recta altera (§. 148.): atque hinc *inter duo puncta non nisi unica recta cadit.*

COROLLARIUM III.

151. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 31), ubi æquales fuerint, sibi mutuò congruunt, consequenter etiam peripheriæ, atque adeò ipsi circuli congruere debent (§. cit.). Circuli itaque æquales sunt, quorum æquales sunt radii; minores: si fuerint radii minores. (§. 145. 32.)

CO-

COROLLARIUM IV.

152. Ex uno itaque puncto eodem radiò
circulus non nisi unus describi potest.

THEOREMA VII.

153. In figuris similibus anguli homologi
sunt æquales, & latera homologa proportio-
nalia.

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ
à se invicem discerni debent. (§. 21. Arith:)

Quare cum figuræ non possint distingvi,
nisi per angulos & latera, anguli æquales
(§. 147.), latera verò proportionalia esse de-
bent. (§. 131. Arith:).

AXIOMA I.

154. Qualibet quantitas una cum altera
comparata, aut æqualis, aut inæqualis depre-
henditur; si inæqualis: major vel minor sit,
oportet.

AXIOMA II.

155. Æqualia sunt, quæ per æqualia de-
terminantur; seu quod perinde est: figuræ
æquales sunt, quæ ex æqualibus datis eodem
modo construuntur.

AXIOMA III.

156. Similia sunt, quæ per similia deter-
minantur, seu quod in idem redit: figuræ si-
miles.

miles sunt, quæ ex similibus datis simili modo construuntur.

A X I O M A IV.

157. Similia uni tertio sunt similia inter se; & similibus similia sunt inter se similia.

A X I O M A V.

158. Lineæ eidem rectæ parallelæ sunt inter se parallelæ; & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.



CAPUT III.

DE LINEARUM RECTARUM & TRIANGULORUM SYMPTOMATIS.

T H E O R E M A VIII.

Tab. II.
Fig. 35.

159. Duo Triangula ABC & abc sunt æqualia & similia; atque adeo angulos reliquos & latera homologa habent æqualia & similia, si in iis æqualia sint
Vel I. Latus unum, & anguli adjacentes
 $AB = ab$, $A = a$, $B = b$.
Vel II. Duo latera & angulus iis comprehensus.

AB

$AB = ab, AC = ac, A = a.$

Vel III. Omnia tria latera.

DEMONSTRATIO.

Si enim concipiamus unum super alterum imponi, tum ipsa triangula, tum anguli & latera angulis, lateribusque homologis congruent (§. 3.); consequenter tum tota triangula, tum reliqui anguli & latera homologa erunt æqualia & similia (§. 145. 155.).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

160. Datis itaque uno latere & duobus angulis adjacentibus, vel duobus lateribus & angulo ab iis comprehenso, vel omnibus tribus lateribus totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

161. In eodem, vel æqualibus in specie triangulis latera æqualibus angulis opposita sunt æqualia; & contra anguli æqualibus lateribus oppositi sunt æquales. In omni verò triangulo majori lateri major, minori minor angulus opponitur. & contra (§. 159.).

PROBLEMA VIII.

162. Datis duobus lateribus AB & AC cum angulo intercepto A , triangulum construere.

RESOLUTIO.

I. Assumpto AB probasi, in A constituatur angulus datus (§. 139.).

Tab: II.
Fig: 35.

II. In crus ejus alterum transferatur altera
daturum AC.

III. Tandem ducatur BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 159.).

SCHOLIUM.

163. Tyroneſe latera & angulos datos in
numeris aſſumant, quod in aliquibus caſibus
ad demonſtrationes diſtinctius percipiendas
proderit, quas ſupra § 142. commendavimus.

THEOREMA IX.

164. In Triangulo æquicruro DFE: 1mo,
Tab: VII. Anguli ad baſim y & u ſunt æquales; 2do,
Fig: 38. Recta FG, qua angulum DFE biſariam ſe-
cat, baſim quoque DE, & 3tio triangulum
ipſum biſariam ſecat. 4to Denique FG ad
baſim DE eſt perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam o = x per hypotheſ: DF = FE
(§. 76.) & FG = FG (§. 73. Arith.).
Ergo 1mo y = u 2do DG = GE. 3tio
 $\triangle DFG = \triangle GFE$ (§. 159.) & quia e-
tiam anguli ad G æquales (§. citt.), 4to FG
ad DE eſt perpendicularis (§. 86.) Q. e. d.

COROLLARIUM.

165. Cùm Triangulum æquilaterum ſit e-
tiam æquicrurum (§. 75, 76.), Theorema
præſens de æquilatero itidem verum eſt.

THEO-

THEOREMA X.

166. In *Triangulo æquilatero ABC* omnes anguli sunt inter se æquales. Tab: I. Fig: 16.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AC = CB$ (§. 75.) Ergo $A = B$ (§. 161.) est verò etiam $AC = AB$ (§. 75.) Ergo $C = B$ (§. 161.) Quare $A = C$ (§. 77. *Arith.*) Q. e. d.

COROLLARIUM.

167. *Triangulum* itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 93.).

THEOREMA XI.

168. Si *Trianguli ABC* latus unum continuetur in *D*, erit *angulus externus DAB* major quolibet interno opposito *B*, vel *C*. Tab: III. Fig: 39.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur *AB* bifariam divisa in *F*, & ducatur recta *CF*, producenda in *G* (§. 16.) donec fiat $FG = FC$. Quoniam *GC* secat *AB* in *F*, (§. 42.) erit $z = y$ (§. 140.), Consequenter $o = x$ (§. 159.). Sed $DAB > o$ (§. 75. *Arith.*), ergo & $DAB > x$ (§. 79. *Arith.*). Eodem modò ostenditur esse *DAB*, aut quòd perinde est (§. 140.) ejus verticalem $HAC > ACB$ Q. e. d.

THEOREMA XII.

169.

Tab: III. 169. *In omni Triangulo ABD, duo latera*
 Fig: 40. *AD & BD simul sumpta, sunt tertio AB ma-*
jora.

DEMONSTRATIO.

Prodūcatur AD in C (§. 16.), donec fiat
 $BD = DC$, adeoque $AC = AD + BD$
 (§. 78. *Arith.*), erit $\triangle BDC$ æquicrurum (§.
 76), & hinc $y = C$ (§. 164.). Cū vero
 fit $y < x + y$ (§. 57. *Arith.*), erit etiam C
 $< x + y$ (§. 79. *Arithm.*). Ergo AC, seu
 $AD + DB > AB$ (§. 161.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab: I. 170. *Linea recta AB est brevissima, omni-*
 Fig: 1. *um, quæ intra eosdem terminos A & B con-*
tinetur.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ADCEB; ducantur rectæ
 AC & CB, erit $AC + CB > AB$ (§. 169.).
 Ducantur etiam rectæ AD & DC. Item CE
 & EB; erit $AD + DC > AC$, & $CE + EB$
 $> CB$ (§. citt.), consequenter $AD + DC +$
 $CE + EB > AC + CB$ (§. 80. *Arithm.*); &
 adeoque multo magis $AD + DC + CE + EB$
 $> AB$. Quod si plures ducas subtenfas, erit
 earum aggregatum denuo majus ipsâ AB.
 Quare cum illæ subtenfæ cum curva tan-
 dem coincidunt, erit ea major rectâ AB in-
 tra eosdem terminos contenta; hoc est omni-
 um linearum brevissima, quæ ab A usque ad
 B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

171. Distantia itaque puncti A à puncto B in plano est linea recta (§. 12. 30.). Cumque inter duo puncta nonnisi unica linea contineri possit (§. 150.), *via in plano brevissima est numero unica.*

COROLLARIUM II.

172. Singula igitur peripheriæ puncta à centro circuli æqualiter distant (§. 32.).

THEOREMA XIV.

173. Si ex punctis extremis C & O recta alicujus radiis CP & PO, qui simul sumpti recta CO (non nimirum tamen) majores sint, describantur circuli; illi se mutuo secabunt.

Tab: III.
Fig: 43.

DEMONSTRATIO.

Sit $CP < CO$, erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 18. Arith.). Quare si ex centro C radio CP circulus PNQP describatur (§. 116.), erit punctum N in peripheria ipsius (§. 172.). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus, fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo $CN + NO < CP + PO$ per hypoth: & $CP = CN$ (§. 32.); erit $NO < PO$ (§. 82. Arith.). Sed $PO = MO$ (§. 32.). Ergo $NO < MO$ (§. 79. Arit.). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; consequenter circuli se mutuo secant (§. 44.). Q. e. unum.

D

Eodem

Eodem modò demonstratur, si fuerit $CP > CO$; vel $CP = CO$. *Q. e. alterum.*

SCHOLION.

174. Diximus in Theoremate si radii sumpti non fuerint nimium majores rectâ; nam si eorum unus sit justò major rectâ datâ, potest unus circulus alium comprehendere.

PROBLEMA X.

175. Super data rectâ AB triangulum æquilaterum construere.

RESOLUTIO.

Tab: III.
Fig: 37.

I. Ex A tanquam centro intervallò ipsius AB describatur arcus y ; &

II. Ex B eodem intervallò alius x (§. 116) qui priorem in C interfecabit (§. 173).

III. Ducantur rectæ AC & CB .
Erit ACB triangulum æquilaterum.

DEMONSTRATIO.

$AC = AB$ & $BC = AB$ (§. 32.). Ergo $AC = BC$ (§. 77. Arith.). Ergo triangulum ABC æquilaterum (§. 75.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

176. Data basi DE , & crure DF , quod illa dimidiâ majus sit, triangulum æquicrurum construere.

RESOLUTIO.

I. Ex

I. Ex uno basis extremo D intervallo cru-
ris dati DF describatur arcus, &

Tab: I.
Fig: 17.

II. Ex altero extremo E eodem intervallo
arcus alius (§. 176.), qui ob $DF + EF > DE$
per *hypoth: & construct:* priorem in F inter-
secabit (§. 73.).

III. Ducantur rectæ DF & EF (§. 110.).
Dico DFE esse triangulum æquicururum.

DEMONSTRATIO.

$DF = FE$ per *construct:* Ergo EDF est
triangulum æquicururum. (§. 76.) Q. e. d.

PROBLEMA XII.

177. Datis tribus lateribus AB, BC, CA,
quorum duo simul sumpta AC & BC tertio
AB majora sunt, triangulum construere.

RESOLUTIO.

I. Assumpta AB pro basi, ex A intervallo
ipsius AC describatur arcus y;

Tab: III.
Fig: 37.

II. Et ex B intervallò ipsius BC arcus alius
x (§. 116.), qui ob $AC + BC > AB$ per *hy-*
poth: priorem in C secabit (§. 178.).

III. Ducantur rectæ AB & BC (§. 110.).
Ita factum est, quod petebatur (§. 159.).

PROBLEMA XIII.

178. Angulo dato DAE aequalem b a c con-
struere.

RESOLUTIO.

D2 imo.

Imo. In Charta.

Tab: III.
Fig: 44.

I. Ex A intervallo AC describatur arcus BC, erit $AB = AC$ (§. 32.).

II. Ducatur recta ac $= AC$, & ex a intervallô ipsius AB, describatur arcus x;

III. Item ex C intervallo ipsius CB, alius arcus y; qui priorem in b interfecabit (§. 173.).

IV. Ducatur recta a b. Dico esse $a = A$.

2do. In Terra.

I. Defigatur baculus in C cum A & E, itemquæ alius in B cum A & D in eadem recta (§. 112.).

II. In a & c defigantur baculi ita, ut sit ac $= AC$.

III. Ad eos funis vel catena ita applicetur, ut sit pars ipsius ab $= AB$ & altera cb $= CB$.

IV. In b defigatur baculus.

Dico esse bac $= BAC$.

Interdum in solo modo priore utimur.

Quodsi anguli noti sunt gradus, in charta transportatore (§. 135.), in campo Goniometrico sepe numero utimur (§. 134.).

Tab: II.
Fig: 26.
29.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu ac $= AC$, ab $= AB$, cb $= CB$ per constr: Ergo $BAC = bac$ (§. 159.). Q. e. d.

PROBLEMA XIV.

179. *Angulum datum HIK in duas partes
aequales dividere.*

RESOLUTIO.

I. Ex centro I ducatur radiò quocunque
arcus LM (§. 116.). Tab: III.
Fig: 45.

II. Ex L & M intervallo dimidia LM ma-
jore ducantur arcus se mutuò secantes in N
(§. 173.).

III. Ducatur recta IN.
Dico esse HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL = IM (§. 32.), LN = MN
per construct: IN = IN. Ergo HIN = NIK
(§. 159, 161).

PROBLEMA XV.

180. *Lineam rectam AB in duas partes a-
equales dividere; & in medio ejus perpendicu-
larem erigere.*

RESOLUTIO.

imo. In charta.

I. Ex A & B intervallo dimidia AB majore
ducantur arcus se mutuò in C secantes (§. Tab: III.
Fig: 46.

II. Fiat similis intersectio infra lineam in
D (§. citt.).

III. Ducatur recta DC.

Dico esse AE = EB; & CD ad AB esse
perpendicularem. E3 DE-

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACB est æquicrurum (§. 176.), & recta CED dividit angulum ACB, bifariam (§. 179.). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis est (§. 164.). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab: III. I. Ponatur circinus in A & eousqué aperitur, donec medium lineæ attingere videatur in D.

II. Intervallum AD transferatur ex B in E.

III. Quò factò, jam facile determinatu est punctum medium F.

2do. In Solo.

I. Filum longitudini lineæ AB æquale comparatur, ut punctum medium inveniatur.

II. Hoc punctum aciculâ infixâ notetur, & filum lineæ datæ rursus coextendatur.

III. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum, quod petebatur.

SCHOLION.

181. Duo modi posteriores secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur, illorum tamen in praxi usus est insignis.

PROBLEMA XVI.

182. Ex puncto G in recta ML dato perpendiculararem GI erigere.

RESOLUTIO.

imo. In Charta.

I. Posito circinô in G, arbitrariô intervallo refecentur utrinque partes æquales GK & GH.

II. Ex punctis K & H intervallô dimidiâ KH majore, fiat intersectio in I.

III. Ducatur recta GI; quæ erit ad ML perpendicularis.

Tab. III.
Fig. 48.

DEMONSTRATIO.

Nam $KG = GH$, & $KI = IH$ per constr:
 $IG = IG$. Ergo anguli ad G sunt æquales;
(§. 159.); consequenter IG ad ML, perpendicularis (§. 68.). Q. e. d.

Aliter.

I. Normæ, hoc est instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat.

II. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 110.); quæ erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normæ est rectus per hypoth: sed ipsi æqualis est IGL (§. 145.), adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 67.).

D4

2do.

2do. In Solo.

Normâ utimur majore & juxta crus GI
lum extenditur. Aut
Tab: III. I. Filum KIH in duas partes æquales in
Fig: 48. divisum, ex punctis K & H extenditur, &
II. In I baculus defigitur, tandemquē
III. KH bifariam dividitur in G (§. 180.).
Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

KI = HI & KG = GH per construct: &
GI = GI. Ergo anguli ad G deinceps po-
siti sunt æquales (§. 159.); consequenter IG
ad ML perpendicularis (§. 68.). Q. e. d.

THEOREMA XV.

183. Ex puncto D super eadem recta AB
unica nonnisi perpendicularis CD erigi potest.

DEMONSTRATIO.

Tab: III. Si fieri potest, sit præterea DE ad idem pun-
Fig: 50. ctum D perpendicularis, quæ intra crura an-
guli ADC cadat, erit ADE angulus rectus
(§. 67.). Et siquidem CD perpendicularis ad
AD per hypoth: ADC similiter rectus (§. cit.).
Ergo ADE = ADC (§. 27.). Quod cum sit
absurdum (§. 75. Arith:); ED ad AB perpen-
dicularis esse nequit. Q. e. d.

SCHOLIUM.

184. Hinc mons non plures homines, vites,

Ec. capit, quam planum, etsi ibi facilius sese explicent (§. 188.).

THEOREMA XVI.

185. Si recta CD perpendicularis ad DB Tab: III. continuetur in F ; erit etiam DF ad AB per- Fig: 50. perpendicularis: *difficilis p. 209*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB per hyp: angulus x rectus est (§. 67.). Ergo y similiter rectus est (§. 54.); consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVII.

186. Si duo puncta H & q alicujus rectæ HI à duobus punctis K & L alterius rectæ MN utrinque æqualiter distant; erit HI ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Siquidem puncta H & q à punctis K & L Tab: III. utrinque æqualiter distant per *hypoth.*; HK Fig: 51. $\equiv HL$ & $qK \equiv qL$ (§. 171.); est verò etiam $qH \equiv qH$. Ergo $o \equiv x$ (§. 159.); consequenter cum $HI \equiv HI$, anguli ad I æquales (§. cit.); adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 68.). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

187. A dato puncto H ad rectam MN perpendiculararem HI demittere. RE-

R E S O L U T I O.

1mo. *In Charta.*

I. Positò circinò in H intervallò arbitrariò, eodè tamen, intersecetur MN in K & L.

II. Ex K & L fiat intersectio in q (§. 173.).

III. Ducatur per q recta HI. Hæc erit ad MN perpendicularis.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam $KH = LH$ & $Kq = Lq$ per *constr.*, puncta H & q à punctis K & L æqualiter distant; Ergo HI ad MN perpendicularis. (§. 186.) *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. III.
Fig. 49.

I. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita, ut crus unum eandem fringat, alterum verò punctum datum I attingat.

II. Ducatur recta IG, quæ ad ML perpendicularis erit.

D E M O N S T R A T I O.

Eadem est, quæ in casu simili data §. 182.

2do. *In Solo.*

Aut utimur normâ majore, ut in problema-
te 16, aut

Tab. III.
Fig. 51.

I. Fune ex H extensò designantur puncta K & L & in iis baculi designantur (§. 112.).

II. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 180.). *Dico*

Dico baculos in I & H defixos perpendiculararem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $KH = LH$, & $KI = LI$ per
constr: $HI = HI$, anguli ad I sunt æquales
 (§. 59.); adeoque HI ad MN perpendicularis
 (§. 68.). *Q. e. d.*

THEOREMA XVIII.

188. Ab uno puncto H ad eandem rectam LM, nonnisi unica perpendicularis HI duci potest. Tab: IV.
 Fig: 52.

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si possibile, adhuc alia HK, erit o rectus (§. 67.); sed quia HI ad LM perpendicularis per *hypoth.*, erit x etiam rectus (§. cit.). Est verò $o > x$ (§. 168.); adeoque unus rectus altero recto major; quod cum sit absurdum (§. 127.); à puncto H ad KM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

189. In omni Triangulo rectangulo HIK angulus unus x rectus est; reliqui H & K sunt acuti. Tab: IV.
 Fig: 52.

DEMONSTRATIO.

Angulus y rectus est (§. 68.); sed $y > m$ item $y > H$ (§. 168); Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. 55.). *Q. e. d.*
 CO.

COROLLARIUM I.

190. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

191. In Triangulo rectangulo latus maximum est hypotenusa. (§. 81. 161.).

THEOREMA XX.

Tab: I.
Fig: 20.

192. In Triangulo obtusangulo PNO angulus obtusus nonnisi unus est, reliqui P & O sunt acuti.

DEMONSTRATIO.

$y + x =$ duobus rectis (§. 129.); sed y utpote obtusus per *hypoth.* major recto (§. 55.). Ergo x recto minor. Quoniam vero $x > O$ (§. 168.), item $x > P$ (§. cit.), erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 55.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

193. In Triangulo obtusangulo, & angulorum maximus est obtusus, & latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 161.).

THEOREMA XXI.

Tab: IV.
Fig: 52.

194. Linea perpendicularis HI est brevissima omnium, quæ à puncto H ad eandem rectam LM duci possunt.

DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM per
hypoth: angulus x rectus est (§. 67.), adeo-
 què HK hypotenusa (§. 81.); consequenter
 $HK > HL$ (§. 191.). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Ergo distantia puncti à linea vel pla-
 no est linea recta ab illo puncto ad lineam, vel
 planum perpendicularis (§. 12.).

COROLLARIUM II.

196. Quare si linea HI fuerit ipsi KL pa-
 rallela, erunt perpendicula quævis ex illa in
 hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia,
 & contra (§. 70.).

Tab: IV.
 Fig: 53.

COROLLARIUM III.

197. Altitudo figuræ est perpendicularum
 ex vertice in basim demissum (§. 103, 195.).

COROLLARIUM IV.

198. In Triangulo rectangulo angulus K
 rectus (§. 79.) & hinc cathetus unus MK ad
 alterum KL perpendicularis (§. 67.). Ergo si
 KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 102.);
 adeoque MK altitudo (§. 197.).

Tab: I.
 Fig: 19.

COROLLARIUM V.

199. Similiter in quadrato & oblongo la-
 tus

Tab: II.
 Fig: 21.

tus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 84, 86), adeoque unum ad alterum perpendicularare (§. 67.). Quodsi ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi, erit A, vel L vertex (§. 102.), consequenter AC vel KL altitudo. (§. 197.).

THEOREMA XXII.

Tab. IV. 200. Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.

DEMONSTRATIO.

Fiat EB = BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 182.). Erit GE = CD (§. 196.) & E = D (§. 127.); consequenter BG = BC, & y = u (§. 159. 161.). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL per *hypoth.* ideo $u + x = o + y$ (§. 68.). Ergo & $o = x$ (§. 81. *Arith.*). Quare cum sit etiam AB = AB; erit m = n (§. 159. 161.); adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 68.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

201. Sunt ergo EG, AB, CD distantie tum rectæ KL à recta HI, tum rectæ HI à recta KL (§. 159.); adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 70.).

THEOREMA XXIII.

202. Si duas parallelas OP & QR secet transversa ST in A & B ; erunt 1mo Anguli alterni y & x æquales: 2do Angulus externus u æqualis interno opposito y : 3tio duo interni oppositi z & y sunt æquales duobus rectis.

Tab: I.

Fig: 12.

DEMONSTRATIO.

Si recta ST secet parallelas ad angulos rectos, omnia manifesta sunt ex Theoremate 22 § 200. Quod si secet obliquè. 1mo Ponamus x minorem esse angulum, quàm y , cum angulus sit inclinatio duarum linearum, inclinabitur OA ad AB (§. 45.), adeoque OP cum QR aliquando concurret (§. 72.); quod cum sit absurdum (§. 71.); x minor esse nequit angulus, quàm y . Eodem modo ostenditur x maiorem esse non posse angulo y . Erit igitur $x = y$ (§. 154.). Q.e. primum: 2do $x = u$ (§. 140.), & $x = y$ (per num: 1.). Ergo $u = y$ [§. 77. Arithm.]. Q.e. alterum.

3tio. $u + z = 180^\circ$ [§. 130.] sed $u = y$ [per num: 2dum.]; Ergo $y + z = 180^\circ$ [§. 14. Arith.]. Quod erat tertium.

COROLLARIUM I.

203. Cum OP & QR ob angulos x & y æquales convergere non possint per demonstrata n. 1. eandem distantiam servabunt [§. 70, 72.]. Jam verò si $x = y$, erit eti-

Tab: I.

Fig: 12.

am $u = y$, & $y + z = 180^\circ$ per num: 2. & contra. *igitur*

Igitur si duas lineas OP & QR secet. trans-
versa ST in A & B ita, ut vel primò $x =$
 y vel 2dò $u = y$; vel 3tiò $y + z = 180$
erunt lineæ ipsæ parallelæ [§. 71.].

PROBLEMA XVIII.

Tab: III. 204. Datis duobus lateribus AB & BC ,
Fig: 37. cum angulo A uni eorum BC opposito trian-
gulum ABC construere.

RESOLUTIO.

I. Ductâ rectâ AB in puncto A fiat angu-
lus dato. æqualis (§. 178.), factâque AB uni
datorum laterum æquali

II. Ex B intervallò alterius lateris dati BC ,
crus anguli interfecetur in C .

III. Puncta B & C connectantur rectâ.

Sic factum est, quod petebatur (§. 155.).

THEOREMA XXIV.

Tab: IV. 205. Perpendiculara AB & GE æquales pa-
Fig: 53. rallelarum partes AG & EB intercipiunt.

DEMONSTRATIO.

$AB = GE$ (§. 196.) $s = y$ (§. 202.) &
 $GB = GB$; Ergo $AG = EB$ (§. 204.
155.). Q. e. d.

THEOREMA XXV.

Tab: IV. 206. Si Trianguli cujuscunque ACB latus
Fig: 56.

unum BC continetur in D ; erit angulus externus DCA aequalis duobus internis oppositis y & z simul sumptis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y + 0 = z$ (§. 202.); consequenter $DCA = x + 0 = y + z$ (§. 78. Arith.). Q.e.d.

THEOREMA XXVI.

207. In quovis triangulo ACB tres anguli y, u, z , simul sumpti sunt aequales duobus rectis, seu 180° . Tab: IV. Fig: 56.

DEMONSTRATIO.

Nam $0 + x = y + z$ (§. 206.). Ergo $0 + x + u = y + z + u$ (§. 78. Arith.); sed $0 + x + u = 180^\circ$ (§. 130.). Ergo $y + z + u = 180^\circ$ (§. 77. Arith.). Q.e.d.

COROLLARIUM I.

208. In Triangulo igitur rectangulo MKL duo anguli obliqui M & L simul sumpti efficiunt rectum, seu 90° ; adeoque si triangulum fuerit æquicrurum, anguli obliqui femirecti sunt (§. 164.). Tab: I. Fig: 19.

COROLLARIUM II.

209. Si unus angulus est obtusus; duoreliqui simul sumpti sunt recto minores (§. 55.).

E. CO.

COROLLARIUM III.

Tab: I.
Fig: 16.

210. In Triangulo æquilatelo ACB quilibet
angulus 60°. Nimirum $180^\circ : 3 = 60$ (§. 160).

COROLLARIUM IV.

211. Cum ergo in Triangulo rectangulo
angulus unus necessario sit rectus (§. 78.)
Triangulum rectangulum æquilaterum esse
non potest.

COROLLARIUM V.

212. Si unus trianguli angulus ex 180° tra-
hatur, summa duorum reliquorum relin-
quitur, & si summa duorum ex 180° auferatur,
residuus angulus sit tertius.

COROLLARIUM VI.

213. Si duo anguli unius Trianguli æqui-
les sint duobus alterius, five seorsim, five
mul sumptis; etiam tertius unius æqualis erit
tertio alterius (§. 81. *Arithm.*):

COROLLARIUM VII.

214. In quovis triangulo duo anguli sin-
sumpti sunt duobus rectis minores.

COROLLARIUM VIII.

215. Quoniam in triangulo æquicraro DFE Tab: I
anguli ad basim y & u æquales sunt (§. 164.), Fig: 17.

fi angulus ad verticem F subtrahatur ex 180° ,
& residuum bissecetur; unus angulorum æ-
qualium y, vel u prodit. Similiter si duplum

anguli unius ad basim y à 180° subducatur, an-
gulus ad verticem F reînquitur.

P R O B L E M A XIX.

216. In extremitate E lineæ EG perpen- Tab: IV,
dicularem EH erigere. Fig: 57.

R E S O L U T I O.

I. Super EG construatür Δ æquilaterum
EIG (§. 175.).

II. Producatur GI in H, donec fiat $HI =$
GI.

III. Ducatur recta HE, quæ erit ad EG per-
pendicularis.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam Δ EIG est æquilaterum per con-
stru:; $0 = 60^\circ$, & $u = 60^\circ$ (§. 210.).

Ergo $y = 120^\circ$ (§. 206.); consequenter ob

$EI = HI$ per constr: erit $x = 30^\circ$ (§. 215.).

Cum ergo sit $x + 0 = 90^\circ$ (§. 85. Arith:),

ergo angu-

angulus ad E rectus (§. 126.); consequenter HE ad GE perpendicularis (§. 67.). Q. e. d.

THEOREMA XXVII.

Tab: IV.
Fig: 53.

217. Si dua linea EG & AB fuerint perpendicularares ad eandem tertiam HI; erunt inter se parallela.

DEMONSTRATIO.

Fiat AB = EG, ducaturque recta KL, erit HI ipsi KL parallela (§. 70.); consequenter EB = GA (§. 205.); Quare cum etiam sit GB = GB; erit EGB = ABG (§. 159.). Ergo EG ipsi AB parallela (§. 203.). Q. e. d.

THEOREMA XXVIII.

Tab: IV.
Fig: 53.

218. Parallela DF & GA inter easdem parallelas FA & DG sunt æquales; & contra si DF & GA fuerint parallela & æquales erit etiam FA ipsi DG parallela & æqualis.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta AD (§. 110.), erit $x = y$ & $o = u$ (§. 202.). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 159.). Q. e. unum.

DF = GA per hypoth.; & cum eadem lineæ sint parallelæ per hypoth.; $o = u$ (§. 202.); quare cum etiam sit DA = DA, erit $x = y$ (§. 159.); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 203.); adeoque etiam æqualis per numerum 1. Q. e. alterum, atque tertium.

PRO.

PROBLEMA XX.

219. Per datum punctum *V* parallelam re- Tab. IV.
RS ducere. Fig. 59.

RESOLUTIO.

imo. In charta.

I. Ex *V*. demittatur perpendicularis *VK* (§. 187.).

II. Ex puncto quolibet *T* erigatur perpendicularis *TA* = *KV* (§. 182.).

III. Per *V* & *A* ducatur recta *MN*, quæ erit ipsi *RS* parallela (§. 196.).

Aliter.

I. Regula ad rectam *RS* applicetur, & circinus intervallò *VK* aperiatur.

II. Crus unum circini juxta ductum, regulæ ab *R* versus *S* promoveatur.

Ita crus alterum per *V* parallelam ipsi *RS* describet.

Aliter.

I. Per datum punctum *V* ducatur utcumque recta *RG*.

II. In *V* fiat $\hat{o} = x$ (§. 178.).

Erit *VN*, seu *MN* parallela ipsi *RS* (§. 203.).

Aliter.

De parallelis ducendis per triangulum re-
 ctangulum & parallelismum sub tempus præ-
 lectionum docebitur. E3 2do.

2do. In campo.

Tab: IV. Commodè utimur modò primò antecessen.
Fig: 59. tium.

vel

I. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 112.).

II. Ad V fiat $o = x$ (§. 178.). Erit MV que facillè produci potest in N (§. 112.), ipsi RS parallela (§. 203.).

Aliter.

Tab: IV. I. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 112.).

II. Fiat $u = x$ (§. 178.) & $TA = u$.

III. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 112.). Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO

Quoniam $x = u$ per constr., erit TA parallela ipsi KV (§. 203.); consequenter $z = y$ (§. 202.). Est verò etiam TA = KV per constr. & TV = TV. Ergo ni = u (§. 159.); consequenter MN parallela ipsi RS (§. 203.). Q. e. d.

PROBLEMA XXI.

Tab: III. 220. Datis recta AB & angulis adjacentibus
Fig: 37.

tibus A & B , qui simul sumptis duobus rectis
minores sunt, triangulum ABC describere.

RESOLUTIO.

I. Ad datam rectam AB excitentur anguli
dati A & B (§. 139.).

II. AC & BC continentur, donec sibi mu-
tuo occurrant in C ; erit ABC triangulum de-
sideratum (§. 159, 155.).

THEOREMA XXIX.

221. Si in triangulo ABC recta DE ali- Tab: IV.
cui interi BC parallela ducatur, segmenta cru- Fig: 54.
rum & ipsis cruribus & sibi proportionalia
sunt: hoc est $AB: AD = AC: AE$, & $AB:$
 $AC = AD: AE$. Item $BD: AD = EC:$
 AE .

DEMONSTRATIO.

Ponamus lineam latera secantem DE pri-
mum in vertice A positam inde servat) situ
ad basim parallelò descendere; igitur quocun-
que loco intermedio eg. in DE hærant, simi-
les utriusque lateris partes AD & AE abscin-
det, siquidem latera illa considerantur tanquam
via, per quam linea DE ad basim BC tendit, &
quemadmodum ob situm parallelum puncta
eius extrema simul utramque basim debent
attingere, ita etiam consistens loco quodam
intermedio utrinque similes viæ illius partes
emetitur, nempe cum unius lateris dimidium
pertransiit, etiam alterius lateris dimidium e-
mensa est; id quod de quavis alia proportio-

E4 ne

ne verum. Erit proinde $AB:AD \equiv AC:AE$ (§. 145. *Arith.*): vel $AB:AC \equiv AD:AE$ (§. 148. *Arithm.*). Q. e. primum.

Quoniam $AB:AD \equiv AC:AE$ per demonstrat. Erit etiam $AB - AD:AD \equiv AC - AE:AE$ (§. 168. *Arithm.*); hoc est $BD:AD \equiv EC:AE$. Q. e. alterum.

COROLLARIUM.

Tab: IV. 222. Quodsi plures etiam ducantur basi-
Fig: 54. parallelæ ab & cd: cum sit $FG: FH \equiv aF: bF \equiv aG: bH$, & $cF: dF \equiv cG: dH$; item-
que $cF: dF \equiv aC: bD$ (§. 221.), erit $cG: dH \equiv aC: bD$ (§. 141. *Arithm.*): vel $cG: ac \equiv dH: bd$ (§. 148. *Arithm.*); segmenta-
crurum, & cruribus, & sibi proportionalia esse patet.

THEOREMA XXX.

Tab: IV. 223. Recta FH angulum GFE bisariam
Fig: 62. secans; basim GE cruribus EFE & GF proportionaliter secat; hoc est: $EF:EH \equiv GF:GH$.

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I, donec fiat $FI \equiv FG$, erit $o + x \equiv y + u$ (§. 206.); sed $o \equiv x$ per hyp: & $y \equiv u$ (§. 164.), adeoque $2y \equiv 2o$ (§. 14. *Arithm.*). Ergo $o \equiv y$ (§. 84. *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 203.). Quare $EF:EH \equiv FI:GH$ (§. 221.) $\equiv GF:GH$ (§. 142. *Arithm.*). Q. e. d.

CO-

COROLLARIUM.

224. Est ergo & $EF:GF = EH:GH$ (§. 148. *Arith.*); consequenter $EF + FG:EF = GE:EH$ (§. 165. *Arith.*), seu $EF + FG:GE = EF:EH$ (§. 148. *Arith.*) hoc est: ut *summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens.*

PROBLEMA XXII.

225. *Datis tribus lineis AB, AC, & BD invenire quartam proportionalem.*

Tab: IV.
Fig: 63.

RESOLUTIO.

I. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.

II. Ex A in B transferatur linearum datarum prima, ex A in C altera, ex B in D tertia.

III. Ducatur recta BC.

IV. In D fiat angulus $x = o$ (§. 178.).

Dico esse $AB:AC = BD:CE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o = x$ per constr.; erit BC ipsi DE parallela (§. 203.). Ergo $AB:AC = BD:CE$ (§. 221.): *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

226. Quodsi duabus lineis AB & AC datis, tertia sit invenienda; ponatur AC bis; semel ut prius, & 2do loco BD; erit nimirum $AB:AC = AC:CE$. CO-

COROLLARIUM II.

Tab: IV.
Fig: 63.

227. Si DB sumatur pro unitate, erit AB: AC \equiv 1: CE (§. 225.); vel AC: AB \equiv CE: 1. (§. 144. *Arith.*); respondebit igitur CE exponenti rationis CA: AB (§. 114, 118. *Arith.*).

THEOREMA XXXI.

228. Si in duobus triangulis ABC & abc vel duo anguli, vel omnes tres fuerint æquales; triacula sunt similia.

DEMONSTRATIO.

Tab: IV.
Fig: 55.

Ponatur parvum triangulum æquiangulum abc in vertice majoris; latera lateribus & angulus angulo, siquidem a \equiv A, congruent (§. 45.). Quoniam verò Abc \equiv ABC, & Acb \equiv ACb *per hypoth.*, erit bc parallela ipsi BC (§. 203.); consequenter AB: Ab \equiv AC: Ac (§. 221.). Eodem modo si angulus c minoris ponatur in majoris Δ li angulo C, erit AB parallela ipsi bc; atque eadem lege inferetur bc: BC \equiv Cc: AC *per demonstrata*. Cum verò ab \equiv Ab & ac \equiv Ac; Item bc \equiv bc, Cc \equiv ac (§. 73. *Ar.*) erit AB: ab \equiv AC: ac, & bc: BC \equiv ac: AC (§. 142. *Arithm.*). Omnia igitur latera homologa proportionalia, atque adeo cum anguli quoque sunt æquales *per hypoth.* triacula æquiangula ABC & abc sunt similia (§. 153.). Q. e. unum.

Siquidem A \equiv a, & B \equiv b, *per hypoth.* erit etiam C \equiv c (§. 213.), adeoque Δ ABC & abc æquiangula (§. 97.); consequenter

ter

ter per demonstrata. Similia. Q. e. alterum.

COROLLARIUM.

229. Quodsi ergo lateri Δ alicui ducatur parallela DE, cum sit $x \parallel y$ & $o \parallel u$ (§. 203.), B verò utriusque triangulo communis; $\Delta\Delta$ ACB & DBE similia sunt (§. 228.), atque adeo latera homologa proportionalia habent (§. 153.).

Tab: IV.

Fig: 61.

THEOREMA XXXII.

230. Duo triangula similia sunt, ac proinde latera homologa proportionalia habent: si vel 1^{mo} lateri alicui trianguli ducatur parallela: vel 2^{do} tres anguli, vel 3^{io} duo anguli, vel 4^{to} tria latera, aut denique 5^{to} duo latera cum angulo intercepto eodem modo determinentur in uno, quo & in altero triangulo.

DEMONSTRATIO.

Tertium, secundum & primum, scilicet Δ ejusmodi fore similia patet per §§. præcedentes. Reliqua duo eodem modo, quo æqualitas $\Delta\Delta$ (§. 159.) evincitur. Datis enim iis in duobus triangulis, impossibile est, ut non reliqua etiam eodem modo determinentur, si triangula construi debeant. Si itaque construantur, tam anguli, quam latera ex similibus datis simili modo construentur. Erunt itaque similia triangula; si vel 1^{mo} tres anguli: vel 2^{do} tria latera &c. eodem modo determinentur in uno, quo & in altero triangulo (§. 156.). Q. e. primum. Quod

Quod est verò alterum patet per §. 153.

PROBLEMA XXIII.

Tab: IV. 231. *Datam rectam AB in quotcunque partes æquales dividere.*
Fig: 64.

RESOLUTIO.

I. Ex recta CD pro arbitrio assumpta, refecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, e. gr. 5.

II. Super harum partium intervallo construatür triangulum æquilaterum CED. (§. 175.).

III. Ex E in a, itidemque ex E in b transferatur recta AB.

IV. Ducatur recta ab; ducantur etiam rectæ aliæ ex E in 1, 2, 3 &c.

Dico imò esse ab = AB, & 2dò ar =

1 AB, a2 = 2 AB; a3 = 3 AB
5 5 5
&c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam Ea = Eb, & EC = ED, angulus etiam utrique triangulo communis per constr.; erit EC: CD = Ea: ab (§. 230.), sed EC = CD per constr. Ergo etiam Ea = ab = AB (§. 126. Arithm.). Q. e. primum.

o = a & b = D per demonstrata, & per §. 153. Ergo ab ipsi CD, & a ipsi C parallelæ (§. 263); consequenter EC: C = Ea:

153. Ea: a1 (§. 230.): sed $C_1 = \frac{1}{5} EC =$

$\frac{1}{5} CD$ per construct.; ergo etiam $a_1 = \frac{1}{5}$

Ea $= \frac{1}{5} AB$ (§. 126. Arith.). Q. e. alter.

Eòdem modò ostenditur esse $a_2 = \frac{2}{5} AB$, & ita porro.

COROLLARIUM I.

232. Quodsi ergo CD fuerit utcumquè di- Tab: IV.
visa in 1, 2, eòdem modò recta ab secabitur Fig: 65.
in eadem ratione. Est nempe $CD: c_1 =$
 $ab: a_1$, & $CD: c_2 = ab: a_2$ &c. (§. 142.
Arithm.).

COROLLARIUM II.

233. Quodsi etiam in Parallelogrammo A Tab: IV.
BCD latus AC in partes æquales, aut juxta Fig: 66.
daram rationem divides, perquè puncta divi-
sionum parallelas ducas: recta AP applicata
in partes desideratas dividetur. Est enim Ab:

$AH = A_1: AP$ (§. 221.). Sed $Ab = \frac{1}{4} AH$;
consequenter $A_1 = \frac{1}{4} AP$ (§. 128. Arit.).

SCHOLION.

234. Corollariorum horum usus est amplissimus in architectura tam civili, quàm militari, præsertim ubi Ichnographiæ vel ampliandi vel contrahendi.

PROBLEMA XXIV.

Tab: IV.
Fig: 67.

235. Scalam Geometricam construere,

RESOLUTIO.

I. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10. æquales, $Bi = 12 = 23$ &c. intervallum verò 10 partium AB, ex B in E, ex E in F &c. quoties libuerit, transferatur.

II. In A erigatur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis in partes 10. æquales divisa.

III. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4. &c. ducantur parallelæ cum AF (§. 219.).

IV. In ultimam CD transferantur partes 10. partibus ipsius AB æquales.

V. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7 &c. lineis transversis connectantur.

Dico si AB fuerit chorda; fore Bi, 12, 23 &c. perticas; 99 pedem unum; 88 pedes duos, 77 tres &c.

DEMONSTRATIO.

$$Bi = 12 = 23. \&c. = \frac{1}{10} AB$$

per constr.: Sed pertica est chordæ pars decima (§. 19, 20.). Ergo cum AB sit chor-

da per hypot.; erunt B1, 12, 230 &c. perticæ.

Q. e. unum.

Porro quia 99 est parallela ipsi A9 per
constr.; C9 : CA = 99 : A9 (§. 229.). Sed

C9 = CA per constr: Ergo 99 =

A9 (§. 128. Arithm:). Quare cum A9 sit
pertica per demonstr.; erit 99 pes (§. 19.).
Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres
digitos. Q. e. alterum.

S' C H O L I O N.

236. Quemadmodum hic linea A9 exigua
in 10 partes æquales dividitur, ita eadem in
quotcunque alias, in tot scilicet; quot partium
erit AC, eodem modo dividi potest. Neque
opus est, ut angulus A sit rectus, sed idem obli-
quus esse potest.

C O R O L L A R I U M.

237. Quodsi ergo circini crus unum col-
locetur in I, & alterum in K, erit intervallum

IK = 1, 45 = 1. 45 & ita porro.

P R O B L E M A XXV.

238. Metiri distantiam duorum locorum
A & B ex eodem tertio C accessorum.

R E S O L U T I O.

I. In locò C ad arbitrium electo designatur
baculus.

II.

Tab: III.

Fig: 41.

II. Linea AC transferatur ope. catenæ ex C in a, ita, ut baculus in a deligendus sit cum C & A in eadem recta (§. 112.).

III. Eadem ratione ex C in b transferatur linea CB.

IV. Investigetur longitudo rectæ ab (§. 113.).

Dico ab esse æqualem distantiae quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 171.). Quoniam verò Aa & Bb sunt lineæ rectæ *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 42.),

erit	x	$=$	y	(§. 140.).
Præterea	ac	$=$	CA	
	bc	$=$	CB	(<i>per constr.</i>)
Ergo	ba	$=$	AB	(§. 159.).

Aliter.

I. Collocatō instrumentō goniometricō in C investigetur quantitas anguli x (§. 134.).

II. Quæratu tandem longitudo rectarum AC & BC (§. 113.).

Fig: 41.

III. Ex datis cruribus AC & BC cum angulo intercepto x construatur juxta scalam Geometricam (§. 237.) triangulum abc (§. 162.).

IV. Inveniatur in eadem mensura scalæ longitudo basis ab (§. 237.).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DE.

DEMONSTRATIO.

Est enim angulus acb \equiv ACB & ac: cb
 \equiv AC: CB *per constr.*; consequenter cb: ab
 \equiv CB: AB (§. 230.), ergo iidem numeri,
 qui respondent rectis cb & ab in mensura mo-
 dica, rectis etiam CB & AB in maiore respon-
 dent (§. 132. *Arithm.*). Q. e. d.

Aliter.

I. In mensula Geometrica horizontali Tab: III.
 collocata assumatur punctum c, & in eo Fig: 42.
 acicula defigatur, ad quam

II. Applicata regula cum dioptris tamdiu
 hic illucque moveatur, donec per eas transi-
 eenti punctum B occurrat. Ducaturque in
 hoc regulæ situ recta cb.

III. Similis collineatio fiat in punctum A,
 ducaturque ca.

IV. Inquiratur longitudo rectarum cA &
 cB (§. 113.), &

V. Ex scala Geometrica transferantur li-
 neæ istis proportionales ex c in a & b (§.
 237.).

VI. Tandem in eadem mensura inveniatur
 longitudo ipsius ab (§. cit.).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in
 mensura maiore; qua in campo utimur.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proximè præcedenti.

SCHOLIUM I.

F

239.

Tab. III.
Fig: 41.

239. Quod si angustia spatii non permittat,
ut integra AC & BC in a & b transferan-

tur, poterunt a & bc fieri — — — &

ipsarum AC & BC ; quo in casu eodem modo
quo in resolutione 2da demonstrabitur esse

— — — vel — — — &c. ipsius AB .
2 3 4

SCHOLIUM II.

240. Notent Tyrones artificium, quod
monstrationes Geometricas non modo ad
cillimam intelligentiam reducere, sed &
quoque invenire possint. Nimirum quidquid
vel ex constructione problematis, aut hypothe-
si theorematis, vel ex conspectu figurae the-
sim simul & hypothesim exhibentis, distincte
cognoscitur, per characteres distincte exprimi-
tur; veluti in demonstratione prima praesenti
quod $X = y$, $aC = AC$ & $bC = BC$. Quo
facto dispiciatur, cujusnam theorematum
tecedentium hypothesis in iis continetur
thesis enim illius theorematis ostendit, quod
ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo
quod ab sit $= AB$. Cum vero maximam
demonstrationum ex paucis de congruentia
& similitudine triangulorum theorematis
beatur, eorundem recordatio familiaris con-
dat, est necesse.

PROBLEMA XXVI.

241. Invenire distantiam duorum locorum *Tab: V:*
 AB , quorum unus B tantum accedi potest. *Fig: 68.*

RESOLUTIO.

I. Baculo ad arbitrium in E defixo recta
 BE transferatur ex E in C , ita ut baculus in C
 defixus sit cum B & E in eadem recta (§. 112.).

II. In C fiat angulus ECF ipsi B æqualis
 (§. 178.).

III. Tandem ex C progrediatur versus D ,
 donec baculus in D defixus sit cum F & C ,
 itemque cum E & A in eadem recta (§. 112.).
 Dico esse $DC = AB$.

DEMONSTRATIO.

$BE = EC$, o = x per constr: & $y =$
 n (§. 140.). Ergo $AB = DC$ (§. 159.).
Q. e. d.

Aliter.

I. Defigatur baculus in I cum B & A in e- *Tab: V.*
 adem recta (§. 112.), itidemque alius utcun- *Fig: 69.*
 que in K .

II. Ex K in L transferatur IK , in M verò
 KB .

III. Denique ex K progrediendum in N ,
 donec baculus ibi defixus sit cum M & L , i-
 tidemque cum K & A in eadem recta (§. 112.).

Dico esse $MN = BA$.

DEMONSTRATIO.

$BK = KM$, & $IK = KL$ per construct:
 o = n (§. 140.), Ergo $IB = ML$ & y
 = x (§. 159.). Quare cum sit o + m =
 n + n (§. 140.); erit $IA = NL$ (§. 159.);

F2

con-

consequenter $AB = NM$ (§. 81. *Arith.*); *men hor*
non inu
Quo

Aliter.

Tab. V.
Fig. 70.

I. Defigantur baculi BC, DE, EF ad per
 pendiculum, ita ut sit $BC = EF$ & A in ex
 dem linea horizontali, ac etiam sit $BD =$
 DE. *craya j*
que in
crux G
titadi
tur cr
pendic

II. BC ex una, & ex altera parte EF in
 intigatur, ut prospiciens ex O per E & C ter
 minum inaccessum A pertingere possit. *tamdi*
dem an

III. Prospiciatur demum per E & C in A
 tum conversim per E & F in G. *stru*
proinde

Dico esse $DA = DG$. *do CI: l*

D E M O N S T R A T I O.

Cum triangula DAE & DEG sint rectan
 gula *per constru*; erunt anguli ad D æquat, per
 les (§. 127.), & siquidem $BC = EF$ & in turque
 eadem horizontali & distantia ab ipsa D per
 constr.; EA & EG æqualiter inclinantur ac cesso A
 DE; consequenter angulus $DEG = DEA$ III. I
 (§. 45.); præterea $DE = DE$. Ergo *DE* (§.
 $= DG$ (§. 159.); *Q. e. d.* IV.

Quodsi ergo BD subtrahatur ex DA residu
 um erit $= AB$ hoc est: $EG = AB$ (§. 81.
Arithm.). *chum a*
le ad a
defixus
V. A
ab.

S C H O L I O N.

242. Theodolito perfecto res accuratè de
 terminatur. In mensula etiam Prætoriana
 utpotè versatili negotium conficitur per qua
 cunque duas altitudines inæquales; vicem *men*
VI.
interva
lta d

Arith: men horum Galerius, imò Spithama interdum non inutiliter obit.

Quo si duo parallelepipeda non admodum crassa jungantur ad angulum rectum, dioptrisque instruantur (cujusmodi instrumentum ad per-
A in ex- crux Geometrica appellatur), distantias atque
BD = altitudines etiam metiri licet. Si enim ponatur crucis hujus altitudo BC in BC perpendiculariter ad horizontem, pars altera LN EF ita
& C ter- tandem attollitur vel deprimitur, donec L in eadem recta sit cum A & C. Tandem siquifit.
C in A dem anguli LIC & ABC sunt recti per constructionem: LI est parallela ipsi AB (§. 203.); proinde invenitur AB per §. 230. inferendo CI: IL = CB: BA.

Tab: V.

Fig: 70.

Aliter.

recta- 243. I. Mensulâ Geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B; ducantur EF & iturque rectæ ac & cb.

a D pa. II. Quæraturs distantia stationis à loco accedantur ac cesso AC (§. 113.), &

= DEB III. Ex scala Geometrica in a c transferatur (§. 237.).

IV. Transferatur mensula in A, ita ut punctum a ipsi A immineat, & per dioptras regulæ ad a c applicatæ baculus in ima statione C defixus conspiciatur.

V. Mox collineatio in B fiat; ducaturque ab.

ratè de VI. Denique in scala Geometrica sumatur intervallum ipsius ab (§. cit.).

er qual- Ita distantia quæsitâ AB innotescet.

men F3 DE.

Tab: V.

Fig: 71.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $c = C$, & $a = A$ per confir-
 erit $ac: ab = AC: AB$ (§. 230.); hoc est:
 dem numerus in scala respondet ipsi ab , q
 in solo ipsi AB (§. 126. *Arith.*). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Ope Goniometrici seu Astrolabii inve-
 getur quantitas angulorum A & C (§. 134.)
 itemque longitudo ipsius AC (§. 113.).

II. Ope instrumenti transportatorii & sca-
 læ Geometricæ construatur triangulum a c
 (§. 220.).

III. Ad scalam Geometricam applicetur re-
 cta ab (§. 237.).

Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proximè præcedenti.

PROBLEMA XXVII.

Tab. V. 244. Metiri distantiam duorum locorum in
 Fig. 68. accessorum AB .

RESOLUTIO.

Sine instrumentis tædiosior est problema-
 tis resolutio, quam ut commendari possit.
 Cui tamen animus fuerit, is

I. Statione in E assumpta rectas BE & AE
 inveniatur (§. 241.).

II. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem
 (§. 238.).

Aliter.

Aliter.

Tab: V.

Fig: 72.

I. Duabus stationibus in C & D electis, in prima C collocetur mensula, & per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ cd, cb,

II. Quærat distantia stationum CD (§. 13.).

III. Et ex scala Geometrica transferatur in C (§. 237.).

IV. Baculo in C defixo mensula collocetur in D, ea lege, ut punctum d ipsi D immineat, hoc est: puncto, in quo defigebatur ante baculus; tum per dioptras regulæ ad cd applicatæ respiciatur ad baculum in C:

V. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ da, & db.

VI. Tandem distantia punctorum a & b investigetur in scala Geometrica (§. cit.).

Dico esse cd: ab \equiv CD: AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim angulus d \equiv BDC, & angulus c \equiv ACD, præterea ac, cd, db eodem modo determinata, quò & ipsa AC, CD, & DB per constr.: Quodsi ergo acdb claudatur recta ab; quin eodem modo determinantur anguli a & b, quò & ipsi A & B, ac etiam recta ab, quò & ipsa AB, dubitari nequit (§. 107.) & consequenter acdb \simeq ACDB (§. 108. & 156.). Ergo cd: ab \equiv CD: AB (§. 153.).

*Q. e. d.**Aliter.*

F4

I.

Tab. V. I. Electis duabus stationibus C & D, in-
Fig. 73, vestigetur quantitas angulorum y & x, item
z & u (§. 134.). Quorum summæ dant an-
gulos C & D (§. 85. *Arith.*).

II. Quærat^{ur} porro distantia stationum
CD.

III. Et ducatur in charta linea recta; in
quam ex scala Geometrica trasferatur recta
cd ipsi CD respondens (§. 237.).

IV. Super ea ope angulorum x & z + u
construatur triangulum bcd, & ope angulo-
rum z & x + y, alterum acd (§. 220.).

V. Tandem in scala Geometrica inveſtigetur
distantia punctorum a & b (§. 237.).

Dico esse AB: CD = ab: cd.

DEMONSTRATIO.

Eadem cum præcedente.

SCHOLIUM.

Tab. II.
Fig. 30.

245. Levi attentione patet simili modo ex
duabus stationibus reperiri distantias plerum-
que locorum. Nec minus manifestum est mensura
sicut in istiusmodi operationibus horizonta-
lia esse debere, id quod obtinetur ope per-
pendiculari ABC.

PROBLEMA XXVIII.

Tab. V.
Fig. 73.

246. Linea inaccessibili AG ducere paral-
lelam XZ.

RESOLUTIO.

I.

I. Fiant omnia ut in problemate præcedenti (§. 244.), ut obtineatur angulus ex: gr: AKS æqualis ipfi ABC \equiv abc: cui

II. Fiar K SZ æqualis (§. 139.): erit SZ, five si protendatur XZ parallela ipfi AG (§. 203.).

PROBLEMA XXIX.

247. *Ad lineam inaccessibilem AG perpendicularem erigere KI.*

RESOLUTIO.

Erigatur perpendicularis KI ipfi XZ parallelae ipsius inaccessibilis AG, erit etiam KI perpendicularis ipfi AG (§. 200.).

PROBLEMA XXX.

248. *Altitudinem accessam AB metiri.*

Tab: V.
Fig: 74.

RESOLUTIO.

I. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.

II. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 110.).

III. Tentando id agendum, ut E & B sint cum oculo in C in eadem recta; quod si itaque humi prostratus ex C habeas & E & B in eadem recta.

IV. Distantiam oculi C ab altitudine AB metire (§. 113.).

Dico esse CA \equiv AB. DE-

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim ED *per constr.* & AB *per* §. 197. perpendiculares; sunt inter se parallele (§. 217.), adeoque $CD:DE = CA:AB$ (§. 229.), sed $CD = DE$ *per hypoth.* Ergo $CA = AB$ (§. 126. *Arithm.*).

Aliter.

Tab: VI.
Fig: 75.

I. In distantia plurium ex.gr. 30, 40 & amplius pedum, desigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquò hinc intervallò in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta.

II. Investigetur distantia baculorum GF, item distantia baculi minoris ab altitudine HF, & differentia baculorum altitudinum GE (§. 113.).

III. Quærat^r ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 276. *Arithm.*).

IV. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico $BH + AH$, seu summam istam esse altitudinem quæsitam AB.

Ex. gr. Sit $HF = 48$, $GF = 20$, $GE =$

$$16 \text{ \& } FC = 5$$

$$4 (20:16 = 48$$

seu

$$5:4 = 48:38 = BH$$

$$\frac{5}{5} = FC = AH$$

$$\frac{43}{5} = AB$$

DE.

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sint-
que BA (§. 197.), & ED *per constr.* ad AC
perpendiculares; erunt eadem perpendicu-
lares ad HF (§. 200.), adeoque EG & BH
parallelæ (§. 220.). Ergo GF: GE = HF:
HB (§. 229.). *Q. e. unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares
inter easdem parallelas HF & AC *per constr.*
(§. 197.), erit FC = HA (§. 196.). Quare
BH + FC = BH + AH (§. 78. *Arithm.*)
= BA (§. 85. *Arithm.*). *Q. e. alterum.*

Aliter Sole lucente aut Luna.

I. Infigatur baculus certæ mensuræ DE, &
mensuretur umbra DS projecta à baculo.

Tab: VI.
Fig: 75.

II. Mensuretur umbra etiam AS ab AB pro-
jecta.

III. Siquidem $\triangle EDS \sim \triangle BAS$ (§. 156.);
inferatur DS: ED = AS: AB (§. 153.).

Aliter.

I. Mensula in D verticaliter erigatur, ita
ut latus ipsius FE sit horizonti parallelum, id
quod obtinetur ope perpendiculi BAC.

Tab: VI.
Fig: 76.

II. Ducatur recta ed lateri mensulæ paral-
lela, & regula cum dioptris ad hanc applica-
ta vertatur mensula, donec collineatio in al-
titudinem quæsitam fiat.

Tab: II.
Fig: 30.

III. Circa punctum e vertatur regula, donec
oculo per dioptras transpicienti apex altitudi-
nis B occurrat, ducaturque recta eb.

IV.

IV. Quærat^r distantia stationis ab altitudine eC (§. 113.).

V. Ex scala Geometrica transferatur ex e in c (§. 237.).

VI. Ex c erigatur perpendicularis bc (§. 102.), quæ

VII. Ad scalam Geometricam applicata, æqualis erit parti altitudinis BC.

VIII. Addatur altitudo AC.

Dico summam esse altitudinem BA.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad AD (§. 197.) & Ce ipsi AD parallela *per constr.*, erit eadem AC perpendicularis ad Ce (§. 200.). Sed ad eandem ce est perpendicularis etiam bc *per constr.*, ergo bc ipsi BC parallela (§. 217.); consequenter ec: cb = eC: CB (§. 229.). Ergo CA + CB = BA (§. 85. *Ar.*). Q. e. d.

Aliter.

I. Investigetur quantitas anguli e (§. 134.), & distantia stationis eC (§. 113.).

II. Super eC ex scala Geometrica assumpta construatur triangulum ad c rectangulum ecb (§. 220.).

Erit ec: cb = EC: CB.

DEMONSTRATIO.

Est enim C = c & E = e *per constr.* adeoque ec: cb = EC: CB (§. 230.). Q. e. d.

Aliter

Aliter.

I. Suspendatur ex puncto F quadrans, simulque ex centro quadrantis filum FR, cui pondus sit appensum, demittatur. Tab. V.
Fig. 74.

II. Per dioptras quadrantis in L & F respiciatur ad apicem altitudinis in A.

III. Notentur gradus in arcu RG, ut obtineatur angulus RFG \equiv ipsi AFB.

IV. Reliqua omnia fiant, ut in casu præcedenti.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ in casu præcedenti; unum præterea evincendum; angulum scilicet RFG æqualem esse angulo AFB. *Quod ita patet,*

Anguli HFR & LFG sunt recti *per constr:* adeoque æquales (§. 127.), dempto proinde utrinque angulo communi LFR, erit angulus RFG \equiv angulo HFL (§. 81. *Arit.*), sed angulus HFL \equiv AFB (§. 140); consequenter etiam RF G \equiv AFB (§. 77. *Arit.*). *Q.e.d.*

SCHOLIUM I.

249. In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfectè horizontalis, quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam instrumenti altitudo, quam ipsa CA addenda in altitudine accessoria facile investiganda. Neesse etiam, ut baculi ad horizontem perpendiculariter infigantur & in instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur, imo altitudo AC eodem modo inveniri potest, quo ipsam BC invenimus.

SCHOLIUM II.

250.

Tab: VI.
Fig: 76.

250. Denique in metiendis altitudinibus distantia ejusmodi assumenda, ut angulus bec non multum abeat à semirecto, ita enim, etsi contingat in angulo error, erit is minor hoc in angulo, quam in majore, aut minore; quæ res in Trigonometria demonstrabitur.

SCHOLIUM III.

Tab: V.
Fig: 68.

251. Sed in distantis metiendis ex uno loco eadem Trigonometria teste statio in E ea eligenda, ut angulus AEB sit major recto, id quod obtinetur, si latus EB sit $> EA$.

Tab: V.
Fig: 71.
72.

In distantis verò metiendis ex duobus angulis C & A atque latere uno (§. 244.), si erratum est in angulo C vel A aut C vel D , minimus error admittitur, si angulus B sit rectus; aut etiam in 2do casu anguli B & A sint recti. De his præmonendos Geometras hic loci esse visum fuit, antequam in Trigonometria demonstrabuntur. Non solum verò in angulis, sed in lateribus aberrationum casus omnes exactissime persequitur doctissimus MARINONIUS. (a)

PROBLEMA XXXI.

Tab: VI.
Fig: 75.

252. Altitudinem inaccessam AB metiri.

RESOLUTIO.

Absquæ Instrumentis.

I. Distantia stationis CA vel HF quæritur (§. 241.).

II. Reliqua fiunt $FG: GE = FH: AB$ &c. ut §. 248. Aliter.

(a) De Re Ichnographica C. V. toto.

Aliter.

I. Collineetur per F & I in A; tum

Tab: VI.

II. Inveniatur distantia AC inferendo

Fig: 75.

 $a : b :: d + x : x$ (§. 230.), hoc est $a - b : b :: d + x - x : x$ (§. 168 Ar.); erit er-

b d

go $\frac{a-b}{x} = DA$ (§. 276. Arith.).

a—b

Igitur $DA + DC = AC$ (§. 85. Arithm.).

III. Habita AC inveniatur BA, ut §. 248;

Scilicet $SD : DE :: SA : AB$ (§. 230.).

COROLLARIUM.

253. Si $DE = a$, $BC = b$, $BD = d$. Tab: V.& distantia BA sit $= x$, reperiatur etiam BA Fig: 70.

b d

 $\frac{b}{a+b} =$

a + b

*Aliter.*254. I. Statione in D electa mensula col- Tab: VI.
locetur, ut in Problemate præcedente §. 248. Fig: 77.

II. Ducantur ut ibidem rectæ ef & af.

III. Baculi in G defixi, ut sit in recta fc, quæ-
ratur distantia à puncto f (§. 113.), &IV. Ex scala Geometrica transferatur
in fe (§. 237.).V. Sub puncto F defigatur baculus & mē-
sula ita collocetur in G, ut punctum e ipsi G
immineat, id quod obtinetur per sectionem
filarem planorum inferius demonstrandam,
& per dioptras regulæ ad ef applicatæ re-
spicienti baculus sub puncto f constitutus oc-
currat.

VI.

VI. Vertatur regula circa punctum e, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta ea.

VII. Ex puncto a demittatur a c ad f c perpendicularis (§. 187.); quæ

VIII. Ad scalam Geometricam applicata prodit altitudinem AC.

IX. Quodli puncta B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti f, ut habeatur AB; sin minus regula circa e vertatur, donec per dioptras videatur B; ducaturque ab & perpendicularum a c continuetur, donec ipsi cB in b occurrat.

Etenim a b in scalam Geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

Siquidem in $\triangle \triangle$ fea & Fe A, est angulus afe \equiv Afe, & aef \equiv Aef per constr.: Ergo fe: ea \equiv Fe: eA (§. 230.).

Præterea AC & ac perpendiculares ad FC per constr.: adeoque inter se parallelæ (§. 217.); consequenter ea: ac \equiv eA: AC (§. 230.), igitur fe: ac \equiv Fe: AC (§. 169. Arith.). Q. e. unum.

Quoniam a b parallela ipsi AB per demonstr: eodem modo erit ae: ab \equiv Ae: AB (§. 230.); & fe: ea \equiv Fe: EA per demonstr.: proinde fe: ab \equiv Fe: AB (§. 172. Arith.). Q. e. alter.

SCHOLIUM I.

255. Si loco montis esset pons in C & B extremum profundum fossæ, esset eb declivitas

EB

Et *cb* altitudo sive profunditas fossæ. Sed possunt quoque & altitudines & declivitates fossarum, vallium &c. eodem modo inveniri, quo & cæteræ altitudines *ex. gr.*

Aliter.

I. Assume stationes non in directum sitas, sed utrinque ad latus recedentes C & D.

II. In C mensurentur anguli ACD & BCD &c. in D verò anguli ADC, ADB & BDC &c. (§. 134.). Item distantia DC (§. 113.).

III. Ducatur per intersectiones linearum recta AB, quæ ad scalam applicata dabit longitudinem altitudinis inclinatæ AB; quod si

IV. Ducatur perpendicularis EB ad horizontalem BD; erit ea altitudo ipsius AB = ipsi AG.

Facile quoque patet eodem modo inflexionem linearum in punctis S, T, X &c. determinari posse.

DEMONSTRATIO.

Eadem, quæ problematis XXVII. §. 244.

vel

256. Ponatur fossæ profunditas BA, altitudo inclinata cA; si inquiratur primum in latitudinem cD (§. 241, 242.), ut inveniat eam altitudo BA & declivitas cA,

I. $\triangle abc$, cujus omnia latera in numeris dividenda sint, margini fossæ applicetur, &

II. Quoniam in $\triangle abc$ & ABc angulus b

$$G = B$$

Tab: VI.
Fig: 77.

$\equiv B$ (§. 197, 67, 127.), anguli ad c quoque
 $\equiv Bc$ (§. 143.), inferatur $bc : ac \equiv Bc$.
 Ac , vel $bc : ab \equiv Bc : AB$ (§. 230. Geom.
 & 276. Arith.).

Eodem etiam modo puteorum profundita-
 tes inveniuntur.

S C H O L I O N II.

257. Quodsi CD referat latus turris ab
 cujus, C verò & D fenestras, altitudinem
 ipsius AB , imò distantias turrium, templorum
 eodem modo dimetiri & determinare liceat.
 Nos in Turri ad $\text{Ædes } D$. Joannis notum
 214. pedum præaltia ejusmodi praxis quæ
 piam instituiamus.

D E F I N I T I O LXXVII.

Tab. VI.
 Fig. 79.

258. *Linea libellæ* est linea curva AB , cu-
 jus puncta omnia æqualiter distant à centro
 Telluris D . Linea verò recta AC est *linea*
libellæ, seu horizontalis apparens non differens
 sensibiliter à curva AB , nisi 100. orgiis
 longior.

D E F I N I T I O LXXVIII.

259. *Ars libellandi* est, qua invenitur, quæ
 to plus unum superficiæ punctum B , quam
 terum à centro Telluris D distet. Puncta
 hæc termini libellationis dicuntur.

C O R O L L A R I U M.

160. Libellatione itaque altitudinum differentia, montium, superficiei aquarum fluentium vel aliò deducendarum declivitates determinantur.

DEFINITIO LXXIX.

261. *Instrumentum libellationum* est, quod lineam horizontalem FC ad radium telluris A D perpendiculararem definit.

SCHOLION I.

262. *Communissimum est recurvus tubus vitreus AB aqua colorata repletus, cujus summa superficies ad libellam se componentēs dioptrarum loco serviunt, per quas linea horizontalis determinetur.*

Tab: VI.

Fig: 80.

Optimum ac simplicissimum libella genus est, si regula AB trium pedum dioptris instructa alteri CD 4. pedum ad angulum rectum jungatur perpendicularo ex C pendulo. Ceterum tam regula dioptrica, quam pes mensula pretoriana ita aptari potest, ut & huic instrumento & pyxidi magnetica serviat.

Fig: 81.

SCHOLION II.

263. *Quo regula AB&CD longiores fuerint, eo exactior erit operatio. Tubulus opticus Regula AB substitutus & filis perpendiculariter se interfecantibus instructus terminis longius distantibus libellandis melius satisfacit; sed multa circumspectione ea in re opus est, id quod in Astronomia ex principiis opticis docetur.*

Gz

SCHO-

SCHOLIUM III.

Tab: VI.
Fig: 82.

264. Pro libellatione etiam parari debent
duæ vel tres perticæ, in quibus pro libitu at-
tollî, deprimi & ope cochleæ firmari possint ta-
bulæ quadratæ nigro colore tinctæ, in media
tamen duabus albis lineis se decujantibus dis-
tinctæ, ad quarum interjectionis punctum col-
lineatio fieri possit.

PROBLEMA XXXII.

265. Libellare amnem à termino A ad ter-
minum B.

RESOLUTIO.

Tab: VII.
Fig: 83.

I. Libella in C constituta collima per ejus
dioptras, & perticarum F & G perpendicu-
lariter defixarum tabulas m & n à socio tam-
diu attolli facito, donec m C n sint in li-
nea recta.

II. Mensura As + sm altitudinem scilicet
puncti hujus primi m supra aquæ superficiem.
Tandem.

III. Libella transferatur in D; & uti prius
collima, donec o D p sint in linea recta & me-
tire no. Similiter

IV. Eadem fac in E, & metire pq, item-
qué rb + bB; nempe usque ad aquæ in hoc
altero libellationis termino superficiem. De-
nique

V. Altitudines hæ omnes no + pq + rb +
bB addantur, & subtrahatur Am excessus pun-
cti m supra datum primum libellationis ter-
minum.

Diso

Dico residuum By fore differentiam altitudinum, sive declivitatem amnis in B à termino A; sive quod eodem redit, By altitudinem puncti A à termino B

Ex. gr. Sit $no = 8$ pedum, $pq = 4$, $rb = 4$, $bB = 2$ & $Am = 5$; erit $By = 18 - 5 = 13$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam A est punctum peripheriæ terræ *per hypoch:* erit At pars radii à centro terræ (§. 32.), & cum ipsæ ps, rt, yA sint perpendiculares ad mX (§. 261.), erunt etiam inter se parallelæ (§. 217.). Quare cum puncta A & B sint puncta superficiæ terræ, sitque By perpendicularis ipsi BX *per hypoth:* & mX $= no + pq + rb + bB$ (§. 85. *Arithm.*), erit $no + pq + rb + bB - Am = mX - Am$ (§. 81. *Arith.*) $= Ax$ (§. 217. *Arith.*).

Sed $AX = By$ (§. 196.), & etiam AX est pars distantie puncti A à centro eodem (§. 8. *Ar.*); consequenter By est declivitas puncti B à puncto A, sive By est altitudo puncti A à puncto B (§. 14. *Arith.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

266. Quodsi declivitates sint partim ascendentes, partim descendentes, addantur omnes ascendentes $Ao + oc + cd + ef$; addantur etiam descendentes inter se $de + fg + gh + hb$ summa minor à maiore subtrahatur; residuum erit differentia altitudinis loci unius A præ alio B, sive puncti ejus, in quo libellare desieris.

Tab. VII.
Fig: 84.

SCHOLION I.

Fig: 84.

267. Quoniam in hac operatione facile errari potest, consultum est, ut libellatio bis instituat, nempe imò à termino *A* ad terminum *B*, deinde retrò à termino *B* usque ad terminum *A*. Distantiæ quoque *oo*, *cc*, *dd*, &c. mensuranda, si præter differentiam altitudinis terminorum *A* & *B* simul interjecti tractus ichnographia petatur.

SCHOLION II.

Tab: VII.

Fig: 85.
86.

268. Accurata etiam libellatio montium peragi potest ope perticæ quadrangularis inflexilis *AC*, 10, vel 20, pedes longa, & aliarum duarum *BD* & *GH*, in quibus illa profectum disponi, attolli, firmari possit. Si enim pertica hæc *AC* ope perpendiculari *P* constitutam horizontaliter, altitudines $AC + CD + DE + EF - FB$ determinabunt differentiam altitudinis terminorum *A* & *B*.

SCHOLION III.

269. Hæc ex R. P. JOSEPHO LIEGANIG è S. J. adjecta demonstratione problematis decerpfi, ex eo, quod pro more & clarè & breviter rem absolunt ad caput Tyronum. Variorum autem & serme omnium libellarum genera, si quis nosse desideret, adeat celeberrimum JACOBUM LEOPOLDUM (a)

CAPUT

(a) Parte 4ta Theatri statici Universæ sive in Theatro Horizontatico seu libellationis.

CAPUT IV. DE CIRCULI SYMPTOMATIS.

THEOREMA XXXIII.

270. *IN eodem vel aequalibus circulis chordæ æquales AB & ED æquales arcus subtendunt, & contra.*

DEMONSTRATIO.

Angulus ACB = DCE (§. 140.); consequenter arcus AB & DE mensuræ angulorum ACB & DCE æquales sunt (§. 48.). Q. e. inum.

Tab. VIII.
Fig. 87.

Arcus AB & DE æquales sunt *per hypoth.* sunt verò iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 48.), anguli igitur isti æquales sunt (§. 49.). Quoniam porro BC = CE & AC = CD (§. 32.), erit quoque AB = DE (§. 159.). Quod erat alterum.

THEOREMA XXXIV.

271. *Si in circulis inæqualibus arcus AB & ab fuerint similes; chordæ cognomines ad suos radios AC & ac eandem rationem habent.*

Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & ab similes sunt *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB

C4.

&

& acb (§. 48.), erit ACB \equiv acb (§. 49.).
 Est verò AC: BC \equiv ac: bc (§. 32. Geom.
 & 126. Arithm.); igitur $\triangle ABC \sim \triangle abc$;
 consequenter AB: BC \equiv ab: bc (§. 230.).
 Q. e. d.

THEOREMA XXXV.

Tab: VIII. 272. Radius CE chordam BA bifariam se-
 Fig: 83. cans in D, etiam arcum bifariam secat in E, &
 ad chordam BA perpendicularis; & contra, si
 radius CE arcum secuerit bifariam; chordam
 quoque secabit bifariam & ad chordam perpendi-
 cularis erit. Item si radius CE perpendicularis
 ad chordam AB; & arcum AEB, & chordam
 AB secabit bifariam.

DEMONSTRATIO.

AD \equiv DB per hypoth: AC \equiv CB (§.
 32.), DC \equiv DC; ergo o \equiv x, & y \equiv u
 (§. 159.); consequenter & CE ad AB perpen-
 dicularis in D, (§. 68.); & arcus AE atque
 EB æqualium angulorum y & u mensuræ (§.
 48.) æquales sunt (§. 49.). Q. erat unum.

Sint arcus AE & EB æquales per hyp: cum
 iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 48.),
 erit y \equiv u (§. 49.). Est verò etiam AC \equiv
 CB (§. 32.) & DC \equiv DC; ergo o \equiv x (§.
 159.); consequenter & AD \equiv DB (§. cit.)
 & CD ad AB perpendicularis (§. 68.). Q. e-
 rat secundum.

Sit denique radius CE perpendicularis ad
 chordam AB in D per hypoth: erit o \equiv x
 (§. 68.). Est verò etiam AC \equiv CB (§.
 32.) & hinc m \equiv n (§. 161.); consequen-

ter

ter $y = u$ (§. 213.). Quare & arcus AE & EB æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 48.) æquales sunt (§. 49.); & AD = DB (§. 159.). Q. e. tertium.

THEOREMA XXXVI.

273. Si recta NE chordam AB bisariam Tab: VIII.
secet, & ad eam perpendicularis fuerit; per Fig: 88.
centrum transit, & tam arcum AEB, quam
arcum ANB bisariam secat.

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB per hypoth.; erit $o = x$ (§. 68.). Est verò etiam AD = DB per hypoth. & ND = ND. Ergo AN = NB (§. 159.); consequenter arcus AN, & NOB æquales (§. 270.). Eodem modo ostenditur arcus AE & EB æquales esse. Q. erat unum.

Arcus AN = NB & AE = EB per demonstr.; ergo AN + AE = NB + BE (§. 78. Arithm.); consequenter NE diameter circuli (§. 119.), adeoque per centrum transit. (§. 31.). Q. e. alterum.

PROBLEMA XXXIII.

274. Datum arcum AB in duas partes æ- Tab: VIII.
quales dividere. Fig: 88.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ perpendicularis NE (§. 180.); hæc arcum AB

AB bifariam secabit. (§. 272.). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXXIV.

Tab: VIII. 275. *Per data tria puncta non in directum*
Fig: 89. *jacentia A, B & C circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. Ex A & C fiant intersectiones in D & E,
itemque aliæ duæ in G, H, ex C & B.

II. Ducantur rectæ DE & HG.

Dico I esse centrum circuli per A, C & B
describendi (§. 116.).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B, sunt in peripheria alicujus circuli *per hypothesin*; ideoque rectæ AC & CB chordæ (§. 31.); sed ED ad AC, GH ad BC perpendicularis, & ED ipsam AC, GH vero ipsam BC bifariam secant (§. 180.). Ergo utraque per centrum transit (§. 273.); Quare cum DE & GH tantum in I se mutuo secant (§. 42.), erit I centrum circuli per puncta data A, C & B transeuntis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

276. Assumptis in peripheria vel arcu circuli tribus punctis, centrum inveniri, datumque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

277. Si tria puncta iunius peripheriæ tribus punctis alterius congruant, peripheriæ totæ congruant; atque adeo circuli æquales sunt (§. 145.).

COROLLARIUM III.

278. Omne triangulum circulo est inscripibile (§. 104.).

THEOREMA XXXVI.

279. In eodem vel æqualibus circulis chordæ æquales AB & DE à centro C æqualiter distant, & contra. Tab. VIII. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantie chordarum AB & DE à centro per hypot., erunt ad chordas perpendiculares (§. 195.); & hinc o & x recti (§. 67.); adeoque æquales (§. 127.). Porro cum AB = DE per hypot. & CF ad AB perpendicularis per demonstr.: ipsam DE bisecet (§. 72.), erit FA = DG (§. 152. Arith.). Quare cum etiam sit AC = CD (§. 32.), erit CF = CG (§. 155.). Q. erat unum.

Quodsi distantie FC & CG fuerint æquales per hypot. cum sit o = x per demonstr.: & AC = CD (§. 32.), erit AF = DG (§.

155.), sed AF = $\frac{1}{2}$ AB, & DG = $\frac{1}{2}$ DE (§. 272.); Ergo AB = DE (§. 152. Arith.). Q. e. alterum.

THEO.

THEOREMA XXXVIII.

280. Chordarum maxima est diameter AB.

DEMONSTRATIO.

Tab: I. Est enim Co \equiv BC & CN \equiv CA (§. 32.), sed Co + CN $>$ oN (§. 169.); ergo BC + CA hoc est BA $>$ oN (§. 79. Arith.).
Fig: 7. Q. e. d.

COROLLARIUM.

281. Cum in semicirculo ipso semicirculus BDEA est arcus major quolibet BDEN, aut BDE (§. 85. Arithm.); chorda arcus majoris AB major est, chorda minoris arcus ED est minor (§. 270. 31.).

THEOREMA XXXVIII.

Tab: VIII. 282. Si intra triangulum ACB, supra e-
Fig: 90. jusdem basi AB construatur triangulum AD B; erunt crura interioris AD & DB simul sumpta minora cruribus exterioris AC & CB simul sumptis: angulus verò ad verticem interioris D, major angulo ad verticem exterioris C.

DEMONSTRATIO.

Quia AE $<$ AC + CE (§. 169.), erit AE + EB $<$ AC + CE + EB (§. 80. Arith.); hoc est AD + DE + EB $<$ AC + CB (§. 85. 79. Arithm.). Sed DB $<$ DE + EB (§. 169.); ergo multò magis AD + DB $<$ AC + CB (§. 14. 80. Arith.). Q. e. unum.

Quoniam $o > x$ & $u > m'$ (§. 168.); erit
 $o + u > x + m$ (§. 80. *Arith.*). Q. e. alter.

THEOREMA XL.

283. *Secantium MA, MN, ME, ex eodem puncto M ductarum, maxima est MA, quæ per centrum transit, reliquæ sunt tanto minores, quò à centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum MD, Mo, MB, sunt tantò majores, quò magis à centro disiant.*

Minima est MB secantis MA per centrum transeuntis, atque duæ tantum rectæ ME & MZ æquales duci possunt.

Tab. I.

Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

1mo. $NC + MC > MN$ (§. 169.), & $NC = CA$ (§. 32.), ergo $CA + MC > MN$ (§. 14. *Arit.*); consequenter cum $CA + MC$ sit $= MA$ (§. 85. *Arith.*), erit $MA > MN$ (§. 79. *Arith.*). Q. e. primum.

2do. $Mo + Eo > ME$ (§. 169.), sed $oN > Eo$ (§. 281.), ergo multò magis $Mo + oN$, hoc est, MN (§. 85. *Arith.*) $> ME$ (§. 80. *Arith.*). Q. e. secundum.

3to. $Co + oM > MC$ (§. 169.); sed $Co = CB$ (§. 32.); ergo $CB + oM > MC$ (§. 79. *Arith.*); consequenter $oM > MB$ (§. 82. *Arit.*). Q. e. tertium.

4to. $CD + DM > Co + oM$ (§. 282.), sed $CD = Co$ (§. 32.); ergo $CD + DM > Co + oM$ (§. 79. *Arit.*); consequenter $DM > oM$ (§. 82. *Arith.*). Q. erat quartum.

Ultimum denique ex Demonstratis patet.

Q. e. quintum.

THEO-

THEOREMA XL.

Tab. VIII.
Fig. 91.

284. Si ex puncto *E* intra circulum assumpto ducantur in peripheriam rectæ *EF*, *EB*, *EG*, &c. Item *EA*, *ED*, *EH*, &c. maxima erit *EF*, quæ per centrum *C* transit; reliquæ *EB*, *EG*, &c. tantò majores, quo maxime propiores. Contra minima est ea, quæ continuata per centrum transit; reliquæ *ED*, *EH*, &c. sunt tantò majores, quò ab ea remotiores.

DEMONSTRATIO.

1^{mo}. $EC + BC > EB$ (§. 169.), sed $BC = CF$ (§. 32.), ergo $EC + CF > EB$ (§. 79. *Arithm.*): hoc est $EF > EB$ (§. 75. *Arith.*). Q. e. primum.

2^{do}. $EI + GI > GE$ & $IB + IC > BC$ (§. 169.): hoc est ob $BC = GI + IC$ (§. 32.) $IB + IC > GI + IB$ (§. 79. *Arithm.*), adeoque $IB > GI$ (§. 82. *Arith.*). Quare $EI + IB > EI + GI$ (§. 80. *Arith.*), adeoque $EI + IB$, hoc est EB (§. 85. *Arit.*) $> GE$. Quod erat alterum.

3^{tio}. $CE + ED > CD$ (§. 169.), sed $CD = CE + EA$ (§. 32.); ergo $CE + ED > CE + EA$ (§. 79. *Arith.*); consequenter $ED > EA$ (§. 82. *Arit.*). Q. e. tertium.

4^{to}. $EK + KD > ED$, & $KH + KC > CH$ (§. 169.); hoc est ob $CH = CK + KD$ (§. 32.); $KH + KC > KC + KD$ (§. 79. *Ar.*), adeoque $KH > KD$ (§. 82. *Arit.*). Quare $EK + KH$, hoc est EH (§. 85. *Arith.*) $> ED$. Q. erat quartum.

THEO.

THEOREMA XLII.

285. *Recta IL radio CL perpendiculariter insists, tangit circulum in unico puncto L; nec inter tangentem HL & circulum alia recta duci potest.*

Tab: I.

Fig: 3.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta quælibet alia CK; quoniam IL perpendicularis ad CL per hypot.; adeoque L est rectus (§. 67.); consequenter K erit acutus (§. 189.). Ergo CK > CL (§. 161, & 191.); consequenter quodlibet punctum K ab L diversum, hoc est tota linea IL seu HI extra circulum cadit (§. 13 & 32.), & ideo IL circulum tangit in unico puncto L (§. 39.). *Q. erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta quæpiam ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 187.), erit D rectus (§. 67.), adeoque CL > CD (§. 191.). Cadit itaque D intra circulum (§. 32.); quod cum hypothesi repugnet, inter tangentem & circulum recta alia per contactum transiens duci non potest. *Q. erat alterum.*

COROLLARIUM I.

286. Angulus igitur contactus tangente HL & arcu ML interceptus est quovis rectilineo minor; angulus verò semicirculi inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHO.

SCHOLIUM.

287. Hoc paradoxum EUCLIDIS insignium etiam Mathematicorum exercuit ingenia. Videatur ea de re Vallisus & noster R. P. Chrysophorus Clavius complexus est, ac dissolvit fallacias circa ea clarissimus Geometra R. P. ANDRÆAS TAQUETUS.

(a)

COROLLARIUM II.

288. Circulum in eodem puncto L non nisi unica recta HI tangere potest. Cum verò superficies plani solis lineis constet (§. 22.), circulus planum in unico non nisi puncto tangere potest.

THEOREMA XLIII.

Tab: I.
Fig: 3.

289. Omnis recta HI circulum tangens radio CL ad punctum contactus ducta perpendicularis est.

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 187.), quæ utpotè tangens per hypoth: extra circulum cadet (§. 39.); consequenter $CK > CN$ (§. 75. Arithm.) $> CL$ (§. 32. Geom: & §. 79. Arithm.). Est verò etiam $CK < CL$ (§. 191.); quod cum sit absurdum (§. 154.); tangens IL radio CL ad contactum ducta est perpendicularis. Q. e. d.

(a) Scholio ad prop: xxi. Elem: Geom: lib: 3.

COROLLARIUM I.

290. Tangens II. efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 67.).

COROLLARIUM II.

291. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 187.), punctum contactus L determinatur (§. 289.).

Tab: I.

Fig: 3.

PROBLEMA XXXV.

292. Ducere rectam HI circulum in dato puncto L tangentem.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Ex centro circuli C ad punctum contactus L ducatur radius CL.

II. In L excitetur perpendicularis LH (§. 216.), hæc circulum in L tanget (§. 289.).
Q. e. f. & d.

THEOREMA XLIV.

293. Arcus FG & HI inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.

Tab: VIII.

Fig: 92.

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 187.); erit eadem perpendicularis ad GI utpotè per hypoth: parallelam (§. 200.); consequenter dividet tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 272.). Quare
H KF

KF — KG — KH — KI, hoc est FG — HI (§. 81. *Arithm.*); Q. e. d.

THEOREMA XLV.

Tab: I.
Fig: 13.

294. *Angulus ad centrum ACD est duplus anguli ad peripheriam ABD eidem arcui FD insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 219.); erit EB — DF (§. 293.); adeoque o — x (§. 48. 49.).

Sed o — y (§. 140.); ergo x — y

(§. 77. *Arithm.*) — $\frac{1}{2}$ ACD (§. 154.)

Porro o — u (§. 202.); ergo u — y —

$\frac{1}{2}$ ACD (§. 77. *Arith.*). Q. e. primum.

Tab: VIII.
Fig: 93.

II. *In casu altero. o — 2y, & u — 2x per casum primum. Ergo u + o — 2x + 2y (§. 78. *Arithm.*). Hoc est [u + o] —*

$\frac{1}{2}$ x + y [§. 84. 63. *Arithm.*], five $\frac{1}{2}$

CD — ABD (§. 84. *Arithm.*). Q. e. secundum.

Fig: 94.

III. *In casu tertio. o + u — 2y + 2x per casum primum, & o — 2y per casum primum.*

ergo u — 2x (§. 81. *Arithm.*); hoc est —

$$u = x \left[\text{\S. 84. Arit.} \right] \text{ five } \frac{1}{2} \text{ ACD} = A$$

BD. Q. e. tertium.

THEOREMA XLVI.

295. Anguli ad peripheriam ABD mensura est arcus dimidius AD, cui insistit.

Tab: I.
Fig: 13.

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento; insistet ergo arcui minori AD, quàm semicirculo [§. 37. 47.]; adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD [§. 61.]; sed anguli ACD mensura est arcus AD [§. 48.]; ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD [§. 294. 49.]. Q. erat unum.

II. Sit ACB angulus in semicirculo; ducatur utcumque recta CD, erit arcus dimidius

Tab: VIII.
Fig: 95.

AD mensura anguli ACD, & — DB men-

sura ipsius DCB per casum unum. Ergo —

ADB mensura ipsius ACB [§. 155.]. Quod erat 2dum.

III. Sit denique HIK angulus in minore segmento [§. 37.]; ducatur utcumque recta

Fig: 96.

HL, erit ut ante — HL mensura anguli HIL,

H2 &

& $\frac{1}{2}$ — LK mensura anguli LIK [§. 294.];

Ergo denuo $\frac{1}{2}$ — HLK mensura anguli HLK.

Q. erat 3^{ium}.

COROLLARIUM I.

Tab. I. 296. Duo vel plures anguli HLI & H
Fig: 14. MI eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus
insistentes æquales sunt [§. 49.].

COROLLARIUM II.

Fig: 14. 297. Quare cum sit $o = x + u$ [§. 206.],
erit anguli extra centrum mensura dimidij
arcuum HXI & LM, quibus ipse & ejus ver-
ticalis K insistent [§. 295.].

COROLLARIUM III.

Tab. VIII. 298. Cum angulus C in semicirculo ACB
Fig: 95. semicirculo insitit *per hypoth.* mensura ejus
est circuli quadrans [§. 295.]; adeoque ipse
rectus est [§. 125.].

COROLLARIUM IV.

Fig: 96. 299. Cum angulus in majore segmento
DIE arcui DE minori, quam est semicirculus,
insitit [§. 37. 59.]; mensura ejus est qua-
drante minor [§. 295.]; adeoque ipse recto
minor [§. 125.]; consequenter acutus [§. 55.].

CO-

COROLLARIUM V.

300. Eodem modo patet angulum in minore segmento-HIK esse obtusum.

COROLLARIUM VI.

301. Quoniam $o = \frac{x}{r} + \frac{y}{r}$ [§. 206.], & Tab. VIII. Fig: 97.

anguli o mensura est $\frac{ML}{2}$, anguli vero y $\frac{NO}{2}$ [§. 295.]; anguli extra peripheriam G mensura est differentia inter arcum dimidium concavum, LM cui insistit, & dimidium arcum convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXVI.

302. Normam examinare, utrum exacta sit.

RESOLUTIO.

I. Describatur intervallò arbitrariò semicirculus AEF , &

Fig: 98.

II. Ducantur in eo ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrariò assumptum rectæ AE & EF .

III. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex super E cadat. Hoc enim si fieri potest, erit norma exacta [§. 298 & 182.].

THEOREMA XLVII.

303. Mensura anguli minoris segmenti A Tab. VIII. TB est dimidium arcus TDB ; anguli vero majoris segmenti BTH dimidium arcus majoris $BEGT$. Fig: 99.

H₃

DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus diameter TE, erit ATE rectus [§. 289.]; consequenter

mensura ejus $\frac{1}{2}$ EBDT [§. 125.], sive cum

fit ATE = BTE + ATB, & $\frac{1}{2}$ EBDT =

$\frac{1}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 85. Arith.], erit BTE

+ ATB = $\frac{1}{2}$ EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 14. Arith.]

& 49. Geom.], hoc est: quoniam BTE = $\frac{1}{2}$ EB

[§. 49. Geom.], erit $\frac{1}{2}$ EB + ATB = $\frac{1}{2}$

EB + $\frac{1}{2}$ BDT [§. 14. Arith.]. Igitur ATE

= $\frac{1}{2}$ BDT [§. 81. Arith.]. Q. erat unum.

Eodem modo patet dimidium arcum BE
T esse mensuram anguli BTH.

COROLLARIUM I.

304. Cum anguli G mensura etiam sit
dimidius arcus BDT, ipsius D verò arcus di-
midius

midius
gment
gment
to D
TH [§.

305
nuetur
summa
minib
[§. 14
TG [§
fura a
mi. un
anguli

30
dem
MNL
confe
& id

30
fura
lorum
N [§
tibus
inter
erunt

midius BGT [§. 295.], angulus in majore segmento G æqualis est angulo minoris segmenti ATB, & angulus in minore segmento D æqualis est angulo majoris segmenti BTH [§. 48.].

COROLLARIUM II.

305. Si chorda GT ultra circumulum continetur in F; erit anguli BTF mensura semisumma arcuum TB & TG à chordis cognominibus subtensorum. Nam ATF = GTH [§. 140.]; ergo ejus mensura dimidius arcus TG [§. 303.]. Est verò anguli ATB mensura arcus dimidius TB [§. cit.]. Quare semisumma eorundem arcuum est mensura anguli BTF.

COROLLARIUM III.

306. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ, erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN [§. 303.]; consequenter anguli ipsi sunt æquales [§. 49.]; & ideo LM = MN [§. 161.].

Tab. VIII.

Fig: 100.

COROLLARIUM IV.

307. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus [§. 207.]; angulorum verò L & N simul sumptorum arcus LN [§. 306.]; erit anguli M à duobus tangentibus LM & NM mensura arcus differentia intercepti LN à semicirculo KLNO; hoc est: erunt arcus LK & NO mensura anguli M.

H4

PRO-

PROBLEMA XXXVII.

Tab: VIII. 308. Inter duas lineas AB & BE medianas
Fig: 101. proportionalem BD invenire.

RESOLUTIO.

I. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum [§. 51.], dividanturque bifariam in C [§. 180.].

II. Ex C intervallô ipsius AC describatur semicirculus ADE [§. 120.].

III. Ex B erigatur perpendicularis BD [§. 182.].

Dico esse $AB:BD = BD:BE$.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, per constr: erit angulus $m = n$ [§. 68.], & y utriusque triangulo ABD & ADE communis, Ergo $o = z$ & $y = x$ [§. 213.]; quare $\triangle ABD$ non solum $\propto \triangle ADE$ sed etiam $\propto \triangle BDE$ [§. 230.]; ac proinde quia $\triangle ABD \propto \triangle BDE$, erit $AB:BD = BD:BE$ [§. cit.]. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Cum sit $AB:BD = BD:BE$, ex data sagitta AB, & dimidia chorda BD inventur diameter arithmeticè [§. 276. *Arith.*], vel geometricè [§. 226. *Geom.*].

SCHOLIUM.

310. *Advertatur ad problemata corollariis contenta, id quod semel monuisse sufficit. Non exscribuntur ea, ut brevitati consulatur.*

Sit ex. gr. $AB \stackrel{m}{=} 80$, $BD \stackrel{m}{=} 300$, erit
 $BE \stackrel{m}{=} 1125$; adeoque diameter $AB + BE \stackrel{m}{=} 1205$.
 AE $\stackrel{m}{=} 1205$. Seu ferme 12.

COROLLARIUM II.

311. Quoniam $\triangle BDE \sim \triangle ABD$, & $\triangle ABD \sim \triangle ADE$ per demonstr: §. 308; erit etiam $\triangle BDE \sim \triangle ADE$ [§. 157].

Patet adeo \triangle rectangulum per lineam perpendiculararem ex angulo recto in hypotenusam demissam resolvi in duo triangula inter se & toti similia.

COROLLARIUM III.

312. Cum adeo sit etiam $AB:AD \stackrel{m}{=} AD:AE$ [§. 230.]; si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transferatur, factisque reliquis, ut in resolutione problematis, erit AD mediaproportionalis quæ sita.

COROLLARIUM IV.

213. Si ergo AB sit unitas; erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE [§. 219. Ar.].

PROBLEMA XXXVIII.

314. *Inter duas lineas ab & bc invenire duas medias continuè proportionales.*

RE-

RESOLUTIO.

Tab. VIII.

Fig. 103.

I. Jungantur ab & bc ad angulum rectum
& producantur indefinitè versus x & z.

II. Accipiantur deinde duæ normæ & unus
normæ angulus d applicetur rectæ bx
ita, ut *imò* ipsum latus dm per a transeat, &
add aliud latus d o ipsam bz secet in e; & *z*
deniquè ut secundæ normæ uno latere appli-
cato ad normam priorem in e, alterum latus
transeat per c.

Erit bd prima, & be secunda media conti-
nuè proportionalis.

DEMONSTRATIO.

Triangula ade & dec rectangula, atquè db
& eb ad bases ae & ec perpendiculares per
constr: Ergo $ab : db :: db : eb$ & $db : eb ::$
 $eb : bc$ (§. 308.); sunt itaque bd & be
duæ mddiæ contingè proportionales (§. 133.
Arithm.). Q. e. d.

SCHOLIUM.

315. Hoc est celebre Problema, de quo pri-
mus HIPOCRATES CHICUS ex mercatore
nafrago insignis Geometra factus cogitau-
tum, cum Oraculum Delis remedii loco con-
tra pestem duplicationem aræ, quæ cubica fu-
it, proponeret. Unde quemadmodum cubi du-
plicatio ita hoc Problema Deliacum vocatur.
In cuius solutionem Platonis hortatu omnes
Græcia Geometra summò studio incubuere.
Quos inter ipse PLATO. HERON. Ale-

XAM-

xandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPIUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES, NICOMEDES (a) & Recentiores VERNERUS. R. P. GREGORIUS à S. Vincentio è Soc: JESU, CARTHESIUS diversis modis mechanicis atque Geometricis solverunt.

CARTHESIUS per plures normas, quot libuerit, etiam continuè proportionales inter duas datas modum inveniendi tradit. Ex omnibus verò Divini PLATONIS modum describere visum est, eò quod inter omnes sit facillimus. Mechanicus quidem, sed à periculo errandi, si normæ fuerint exactæ (§. 302.), immunis. Geometrici modi pendent à Geometria sublimiori. Inter alios dabimus in analysi facilem modum per intersectionem duarum parabolarum, quem MENECHMUS laudatus invenit.

THEOREMA XLVIII.

316. Si chordæ HM & LI se mutuò secant in K; erit HK: LK = KI: KM.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = x$ & $u = u$ (§. 296.), Tab: I. ideo HK: LK = KI: KM (§. 230.). Q. e. d. Fig: 14.

THEOREMA XLIX.

317. Si fuerint duæ secantes GL & GM Tab: VIII. ex eodem puncto G ductæ; erit GM: GL = GN: GO. DE-

(a) EUTOCIUS in commentariis in lib 2. Archimedes de Sphæra & Cylindro.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GML communis; anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 305.); anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 295.); Quare GNO = GML (§. 48.); igitur GM: GL = GN: GO (§. 230.). Q. e. d.

THEOREMA L.

Tab: VIII.
Fig: 102.

318. Si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ AD & AB , quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens AD media proportionalis inter totam secantem AB & ejus portionem AC extra circulum.

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo-ACD & ABD communis. Angulus ADC = ABD (§. 304.); ideoque AC: AD = AD: AB (§. 230.). Q. e. d.



CAPUT V.

DE FIGURARUM DESCRIPTIONE.

THEO-

THEOREMA LI.

319. In parallelogrammis latera opposita sunt equalia; et si in figura quadrilatera latera opposita fuerint equalia, erit eadem parallelogrammum.

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum per hypoth. erit OP parallela ipsi NQ (§. 89.); consequenter ducta diagonali PN, erit $x = o$ & $n = m$ (§. 202.); adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 159.). Q. e. unum.

Quod si OP = NQ & ON = PQ per hyp: cum etiam sit NP = NP, erit $x = o$ & $n = m$ (§. 159.); consequenter OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 203.); adeoque OPQN parallelogrammum (§. 89.). Q. e. alterum.

Tab: II.

Fig: 24.

THEOREMA LII.

320. Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes aequales: anguli in iis diagonaliter oppositi sunt aequales: anguli verò ad idem latus oppositi duobus rectis aquantur; & duo latera simul sumpta sunt diagonali maiora.

DEMONSTRATIO.

In parallelogrammis ON = PQ & OP = NQ (§. 319.), sed PN = PN. Ergo $\triangle NOP = \triangle NQP$ (§. 159.). Q. erat unum.

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ

&

& ON ipsi PQ parallela (§. 89.), anguli O
& N, N & Q, Q & P, P & O simul sumpti
æquantur duobus rectis (§. 202.). *Q. e. 2dum.*

Quoniam angulus $O + N = N + Q$ per
demonstr. erit $O = Q$ (§. 81. *Arithm.*).
similiter quoniam $Q + P = Q + N$ per *demonstr.*
erit $P = N$ (§. *citt.* *Arithm.*). *Q. e. 3dum.*

Denique $NO + PO > NP$, & $PQ + QN$
 $> PN$ (§. 169.). *Q. erat quartum.*

COROLLARIUM.

231. Quodlibet igitur triangulum est di-
midium parallelogrammi ejusdem baseos &
altitudinis cum parallelogrammo (§. 74.).

PROBLEMA XXXIX.

Tab: II.
Fig: 21.

322. Figuras quadrilateras describere.

RESOLUTIO.

imò. pro quadrato.

I. In C erigatur perpendicularis CA (§. 216.) $= CD$.

II. Ex D & A intervallò ipsius CD fiat in-
tersectio in B (§. 178.).

III. Ducantur AD & DB.

Aliter.

I. In C & D erigantur perpendiculares C
A & DB ipsi CD æquales (§. 216.).

II. Ducatur recta AB.

2dò.

2do. *pro parallelogrammo rectangulo.*

- I. Jungantur MI & IK ad angulos rectos. Tab: II.
 II. Ex M intervallo $ML = IK$ describatur Arcus, & ex K intervallo $KL = IM$ alius
 priorem interfecans in L (§. 173.). Fig: 23.
 III. Ducantur rectæ ML & KL.

3tio. *Pro Rhombo & Rhomboide.*

- Jungantur rectæ datæ sub angulo dato & Tab: II.
 reliqua fiant, ut pro Rectangulo. Fig: 22.
 24.

4to. *Pro Trapezio.*

- Cum Trapezium in duo Triangula USR & Fig: 25.
 URT per diagonalem resolvatur, datis lateri-
 bus trapezii & diagonali UR, duo illa trian-
 gula construuntur (§. 177.).

DEMONSTRATIO.

Manifesta est ex (§§. 84. 85.) & sequen-
 tibus, item §. 319. 320. Ex. gr. unus mo-
 dus describendi quadrati ita demonstrabitur.
 AC = CD = AB = BD per construct:
 Duclâ ergo diagonali AD patet esse C = B
 (§. 159.), sed C rectus per constr: ergo B
 etiam rectus (§. 127.); consequenter o & x,
 item y & m semirecti (§. 208.); adeoque o
 + y & x + m itidem recti. Quare figura
 est quadratum (§. 84.). Q. e. d.

THEOREMA LIII.

323. Si peripheria circuli dividatur in par- Tab: VIII.
 tes Fig: 104.

Si quocumque æquales, ducanturque subtense AB, BC, CD, &c. figura circulo inscripta regularis est.

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales per hypoth: etiam chordæ cognominæ æquales sunt (§. 270.): cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcibus BC, CD, DE, EA, AB &c. insistant: ipsi quoque æquales sunt (§. 296.). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 94.). Q. e. d.

PROBLEMA XXXX.

324. Invenire summam angulorum in quocumque polygono.

RESOLUTIO.

I. Multiplicetur 180° per numerum laterum.

II. A producto subtrahatur 360° .
Residuum est summa quaesita.

Ex. gr. Pentagonum 180° . Hexag. 180°

5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Quælibet figura ex assumpto in ea puncto Tab: VIII.
 in tot triangula AFB, BFC, CFD &c. re- Fig: 105.
 solvitur, quot habet latera AB, BC, CD &c.

per constr: si ergo 180° per numerum laterum
 multiplices, prodit summa omnium angulo-
 rum in dictis triangulis (§. 207.) Sed an-
 guli circa punctum F, qui non pertinent ad
 angulos polygoni, semper efficiunt 360° (§.
 207.). Quodsi itaque à facto supra invento
 abtrahantur 360° , summa angulorum polygo-
 ni relinquitur. Q. e. d.

Aliter.

Cum numerus triangulorum ABC, CAD,
 & DAE, in quæ resolvitur figura polygona
 per diagonales AC & AD ex puncto A du-
 ctas, à numero laterum AB, BC, CD, DE, EA

Tab: IX.
 Fig: 107.
 n. I.

constantè binariò differat *per constr:* si 180°
 multiplicentur per numerum laterum binariò
 diminutum, prodit summa omnium angulo-
 rum A, B, C, D & E. Q. e. i. & d.

Ex. gr. Pentag: 180° . Pro Hexag. 180°

180°	3	4
540°		720°

COROLLARIUM I.

I. 325.

325. Quodsi summa inventa per numerum laterum, seu quod idem est, per numerum angulorum dividatur, quotus est angulus Polygoni regularis (§. 94. Geom. & 276. Arith.)

S C H O L I O N.

326. Potest quoque angulus Polygoni alter inveniri, ut infra problemate XLII. Sequens tabula exhibet summam angulorum figuris rectilineis quibuscunque, & quantitatem unius anguli in polygonis regularibus trigono usque ad Dodecagonum (§. 324). Construitur columna 2da continua additione 180; tertia verò columna numeris in columna 2da per numerum angulorum sive laterum divisis (§. 325.). Utimur hac tabula tum figuris regularibus describendis, tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet instrumento rectè explorata fuerit, nec no. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur, quæ in tabula desinitur. Ex. gr. Si in hexagono superet 960.

Numer: later.	Summa angulorum	Ang: singulorum regularis	Num: later.	Angulorum sum:	Angulus Figura.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	147
VII	900	128 ⁴	XII	1800	150
		7			

COROLLARIUM II.

327. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur; anguli externi 1, 2, 3, 4, &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 129.), sed interni soli efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera demptis 4 rectis (§. 324.). Ergo externi in omni casu conticiunt 4 rectos, seu

Tab. VIII.
Fig. 105.

360

Ex. gr. in pentagono.

Externi cum internis bis 5 recti = 10 rectis.
(§. 129.).

Interni soli bis 5 recti minus 4 rectis =
10 rectis — 4 rectis = 6 rectis (§. 324.). Pro-
inde $10R - 6R = 4$ rectis.

PROBLEMA XII.

328. Dato Polygono regulari circulum circumscribere.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Siquidem omnia polygona latera æqualiter à centro distent, id quod ex æqualitate triangulorum CTS & TCN patet (§. 155.), quoque etiam latera CO & CH bifariam per perpendiculares dividantur in N & S (§. 180.); ubi enim hæc se intersecant in T, punctum intersectionis erit centrum circuli polygono circumscribendi (§. 275 & 273.).

Tab. VIII.
Fig. 106.

COROLLARIUM.

12

329.

329. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 104.).

P R O B L E M A XLII.

Tab: VIII. 330. Invenire angulum A in polygono regulari.
Fig: 106.

R E S O L U T I O.

I. Dividantur 360° per numerum laterum.

II. Quotus iste subtrahatur ex 180° .
Residuum erit angulus A Polygoni quafitus. Ex. gr. in Hexag: $360: 6 = 60$;

& $180 - 60 = 120$
quemadmodum (§. 326.) invenimus.

D E M O N S T R A T I O.

Siquidem quodlibet Polygonum regulare circulo inscribi potest (§. 328.), & sicut se habent omnia latera ad unum latus; ita tota peripheria ad arcum uni lateri respondentem (§. 126. Arith.), reperietur (§. 276. Arith.);

arcus AB , si 360° dividantur per numerum laterum; qui erit mensura anguli m (§. 48.).

Porro $\triangle ABT = \triangle FAT$ (§. 155.), angulus igitur $x = y$ (§. 161.), cum etiam $x = v$ (§. 164.); erit $x + y = x + v$ (§. 78. Arith.); consequenter cum omnes anguli

in triangulo sint 180° (§. 207.); si angulus

m

est cir-
m, five arcus AB mensura anguli inventa sub-
trahatur ex 180, residuum erit $\equiv x + v$ (§.
212.); hoc est per demonstr: $\equiv x + y$ (§.
14. Arit.) \equiv angulo polygoni dati A (§.
85. Arit.): Q. e. d.

THEOREMA LIV.

331. Quadrilateri circulo inscripti ACBD
anguli bini oppositi C & D, item B & A con-
sciunt duos rectos.

DEMONSTRATIO.

Insistunt enim simul sumpti integro circulo Tab. VIII.
lo; adeoque ipsorum mensura est semicirculus Fig. 95.
(§. 295.), sunt ergo duobus rectis æquales
(§. 125.): Q. e. d.

PROBLEMA XLIII.

Circulo quadratum circumscribere.

RESOLUTIO.

- I. Ducantur diametri AB & DE se mutuo
in centro C ad angulos rectos secantes. Tab. I.
Fig. 3.
- II. Ex A, B, E, D intervallò radii fiant in-
tersectiones in F, G, H, I.
- III. Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.
Erit FGHI quadratum circulo circumscri-
ptum (§. 84, 105.).

PROBLEMA XLIV.

333. *Super data recta ED polygonum regulare quodcumque describere.*

RESOLUTIO

Tab: VIII.
Fig: 104.

I. Quærat^{ur} angulus Polygoni (§. 325. 330.).

II. Fiat in E ipsi æqualis (§. 139.), & EA = ED.

III. Per puncta A, E, D describatur circuli peripheria (§. 275.).

IV. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsitæ (§. 322. 329.).

Aliter.

I. In E & D fiant anguli dimidio anguli polygoni seorsim æquales (§. 139.), quorum crura EF & DF, se mutuò secabunt in F (§. 72.).

II. Ex F tanquam centro, radio EF describatur circulus, qui erit polygono circumscriptus (§. 328.).

III. Reliqua fiant, ut antè.

PROBLEMA XLV.

334. *Polygonum regulare quodcumque circulo inscribere.*

RESOLUTIO.

Fig: 104.

I. Dividantur 368 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 49.).

II.

II. Construaturs ad centrum (§. 139.).

III. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 323, 105.). Q. e. f. & d.

S C H O L I O N.

335. Resolutio problematis presentis & precedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem instrumento transportatoris utamur; non tamen ideo contemnenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite praeclara indicium praebet. Pentagoni, Decagoni & quindecagoni constructio- nem dabimus in *Analysi*. Johan. Carolus RE- NALDINUS omnium polygonorum descri- bendorum regulam Catholicam praescribit pas- quorum in *Geometriis practicis* insertam, sed quan- tum fallat, in *Analysi* ostendimus.

P R O B L E M A XLVI.

336. Polygonum regulare quodcumque cir- culo circumscribere.

Tab: VIII.
Fig: 104.

R E S O L U T I O.

I. Inscribatur figura regularis similis cir- culo dato v.g. Pentagonum (§. 334.).

II. Chorda AB bisariam secetur in H per rectam Fh ad eandem in H normalem (§. 130.), quae arcum cognominem in h fecat.

III. Per A & B producantur radii Fa & Fb.

I4 IV.

IV. Per h ducatur a b ipsi AB parallela
diis continuatis in a & b occurrens; erit a
latus unum polygoni circumscripti (§. 105.
285.).

THEOREMA LV.

Tab. VIII.
Fig: 106.

337. *Latus Hexagoni AB aequale est
radio circuli circumscripti AT.*

DEMONSTRATIO.

Angulus T = 60° (§. 48, 210.), ergo

A + B = 120° (§. 212.); consequenter

AT = BT (§. 32.), A = B = 60° (§.

161.). Quare cum AB opponatur etiam 60
erit AB = BT (§. cit.). Q. e. d.

COROLLARIUM I.

338. Hexagonum regulare circulo infer
bitur, si radius ad peripheriam sexies applic
tur.

COROLLARIUM II.

339. Si super linea data AB hexagonum
describendum; triangulum æquilaterum AB
construitur (§. 175.). Est enim vertex
centrum circuli hexagonum quæsitum cir
cumscribendi (§. 337.).

PROBLEMA XLVII.

340. *Datis omnibus lateribus figura cujuscunque & tot diagonalibus, quot sunt latera demptis tribus, figuram construere.*

RESOLUTIO.

Cum figura quælibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula, BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera demptis duobus, non alia re opus est, quàm ut unum triangulum super altero excitetur (§. 177. 155.).

PROBLEMA XLVIII.

341. *Datis omnibus lateribus figura & tot angulis, quot sunt latera demptis tribus, figuram construere.*

Tab: IX.
Fig: 108.

RESOLUTIO.

I. Ducatur recta AB unidatorum laterum æqualis.

II. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 139.), & latera AE & BC determinentur.

III. Fiat porro in C angulus conveniens (§. cit.); & determinetur latus DC &c.

IV. Tandem ex E & D fiat intersectio in F intervallò laterum EF & DF:

Ductis quim DF & EF figura terminabitur, eritque æqualis quæsitæ (§. 155. 146.).

Eodem modò consrui possunt figuræ regulares ex latere & angulo dato (§. 94.).

COROLLARIUM.

342. Si omnes anguli præter unum Γ dentur, duo latera DE & FE utidentur, opus non est.

S C H O L I O N.

343. Tutones ut se exerceant in figuris regularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus assumant. Quodsi contingat figuram non terminari, id indicio erit casum esse impossibile; adeoque vel in angulorum vel in linearum quantitate quædam erunt immutanda.

D E F I N I T I O XXXIX.

344. Ichnographia vocatur figura, quæ alienius planæ superficiei imaginem parvâ formâ ope scalæ delineatam exhibet.

P R O B L E M A XLVII.

Tab. IX.
Fig. 107.

345. Area cujusdam campestris rectilinea abc le liberè permeabilis Ichnographiam perficere; hoc est figuram area campestri similem describere.

R E S O L U T I O.

I. Inquiratur in longitudinem singulorum laterum ab , bc , cd , de , ea , itemque diagonallium ac & ad (§. 113.).

II. Construatür figura $ABCDEA$ (§. 340.) juxta scalam Geometricam (§. 237.).

Erit figura $ABCDE$, similis $abcde$ figuræ campi (§. 344.).

DE-

DEMONSTRATIO.

Δ enim DEA, DCA, CBA eodem modo determinantur, quò & dea, dca, cba; etenim e. g. ab 6, & bc 7 pedum in campo existentibus, etiam AB. 6 & BC 7 pedum ponuntur in charta *per constr.* sunt igitur omnia latera similia, adeoque & ipsa Δ similia (§. 230, 156.). Sed $DEA + DCA + CBA = DCBAE$; & $dea + dca + cba = abcde$ (§. 85. *Arithm.*); consequenter $ABCDE \sim abcde$ (§. 156.). *Q. e. d.*

Aliter.

I. Posita mensula in uno figuræ angulo, ut punctum a vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos, in singulis angulis BCDE defixos, ducanturque lineæ indefinitæ ab, ac, ad, ae.

II. Investigetur longitudo rectarum aB, aC, aD, aE &c. (§. 113.).

III. Exinde juxta scalam determinentur, ab, ac, ad, ae (§. 137.).

IV. Ducantur bc, cd, de.

Dico abcde esse similem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Eadem cum præcedenti. Nisi præterea propter imperitos agrimensores volentes lineam fiducia omnino imminere ipsi lineæ in tabula ducendæ, demonstrandum sit id necessarium prorsus non esse, dummodo ponatur lineæ fiducia ipsi lateri Regula parallela.

Sint

Tab: IX.
Fig: 109.

Tab: IX.
Fig: 108.

Sint enim *per hypothesi*: lineæ fiduciæ b
ge, oc &c. parallelæ ipsiſ AB, AE, BC; du
ctuque iis parallelo describatur figura ABCD
FE, erit ang: a \equiv A (§. 320.); cū ver
ſit b \equiv o &, o \equiv B (§. 202.), erit b \equiv
B (§. 77. *Arithm.*). Similiter v \equiv E &
v \equiv e (§. 202.); ergo e \equiv E, & ita por
ro. Omnes itaque anguli erunt æqua
Conſequenter cum menſuræ quoque lateru
AE & ae. EF & ef &c. omnes ponant
æquales *per operat.* erit ABCDFE & \equiv
abcdfe (§. 155, 156.); ſi igitur abcdfe
ichnographia (§. 344.), eſt etiam ABCDFE
ichnographia (§. 14. *Arithm.*). Q. e. d.

Aliter.

Tab: IX.
Fig: 110.

Menſulâ intra figuram poſitâ eligatur pun
ctum f, ex quo per dioptras, ut antè, collinea
tio fiat in baculos in A, B, C, D, E G deſixo
ducanturque rectæ indefiniatæ fa, fb, fc &c.

II. Inveſtigetur longitudo rectarum fa
&c. (§. 113.).

III. Inde determinetur longitudo rectarum
fa, fb, &c. juxta ſcalam (§. 237.).

IV. Tandem ducantur ab, bc, cd, &c.


Erit abcdg \equiv ABCDEG (§. 156, 345).

Aliter.

Tab: IX.
Fig: 107.

I. Collocato instrumento Goniometrico in
inveſtigetur quantitas angulorum x, m, r, &
(§. 134.) & longitudo rectarum ab, ac, ad,
ae (§. 113.).


II. Conſtruantur juxta ſcalam $\triangle \triangle$ ABC
ACD, & ADE (§. 273, 162.).

Erit ABCDE  abcede per demonstr: superius datam.

Aliter.

I. Collocatō instrumentō Goniometricō in f, investigetur quantitas angulorum, A f B, B f C, C f D &c. (§. 134.), & longitudo rectarum A f B, f B, f C &c. (§. 113.).

II. Construuntur, ut antè, juxta scalam $\Delta\Delta$ ab f, afg, gfe, efd, dfc & cf b (§. 162.).

Eodem modō demonstratur abcdég  ABCDEG (§. 156.).

Aliter.

I. Pyxis cum arcu Magnetica, cujus mar-

go in 360° divisa, & quæ in cardine meridiei ac septemtrionis dioptris instructa ita collocetur in a, ut ejus centrum ipsi vèrtici anguli immineat, & per dioptras collineanti baculus in b defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acûs à linea meridiana Pyxidis ipsi a b imminente versûs ortum vel occasum.

II. Pyxidis dioptræ convertantur successive ad baculos in c, d, &c. defixos; notenturque, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis à linea meridiana.

III. Investigetur longitudo rectarum ab, ac, ad, &c. (§. 113.).

IV. Ducatur in charta recta ML, & assumpto in ea puncto A applicetur centrum instrumenti transportatorii, & fiant anguli i, x, r, angulis declinationum rectarum ab, ac, ad, &c. æquales (§. 139.), atque ex harum lon-

Tab IX.

Fig: 110.

Tab: IX.

Fig: 107.

n 2.

n. 2.

longitudine per scalam determinentur AB, AC, AD, AE (§. 237.).

Dico figuram ABCDE esse alteri abcede similem.

DEMONSTRATIO.

Cum in campo acus magnetica semper eadem lineæ respondeat in plano horizontali in gignario mundi, si eam representet linea LM supra quam ex centro descriptus sit semicirculus fghkl, patet angulos $x = x$, $m = m$, $r = r$, & AB, AC, DA, EA eodem modo determinata, quo & ipsa ab, ac, de, ea, patet: igitur $\triangle \triangle CAB, DCA, DEA = \triangle \triangle cab, dca, dea$ (§. 108.); consequenter ABCDE \sim abcede (§. 185. *Arithm.* 156 *Geom.*). Q. e. d.

SCHOLIUM.

346. Sed magna industria opus, ut exacta sit & habeatur, & postmodum ad usus applicetur acus magnetica, tum propter parallaxin, tum propter declinationem, quæ pro variis temporibus idque subinde in una atque alteram partem immutat, adeo ut immerito celebris R. P. FOURNIER S. perhibeat: (a) parum admodum dari, quod Universale sit in Magnete; sed nihil in terra tam irregulare inveniri. Videatur ea de re clarissimus Geometra Cæsareus JACOBO MARINONI (b), ex quo loco notas quas acis magneticæ apponere visum est, appareat, quantum iis fidendum sit, quæ passim circumferuntur.

(a) Hydrographie à Paris 1667 in fol. Lib. 1. cap. 1. p. 404.

(b) De Re Ichthyographica L. 1. §. 111.

1^{mo}. Communis acuum & aptissima materia chalybs est, præsertim purgatus & carens rimis, spinis, aliisque partibus heterogeneis.

2^{dò}. Consultius aliqua crassitie & latitudine donantur, quæ à capitello C incipiens utrinque augentur usque ad extremitates, ubi vi magnetica imbuendas, adeoque vividiore directionis motu, cum à centro magis removentur, impellendas.

3^{tiò}. Longitudo 4 imò 3 digitorum, non pauciorum tamen, sufficiens est.

4^{to}. Modus affricanda acis magnete ex praxi, quam adhibuit circa suam acum laudatus Geometra, patebit. Ita enim l. cit. p. 13. ait: Acu asserculo lævigato modicum immersa, ut firma maneret, basis ejus suprema duplici Magnete armato, simul perfricabatur; utrinque scilicet à pileolo C usque ad extremitates B & D. Nempè boreali acis ipsius parti CD applicatus erat pes, aut polus australis alterutius magnetis, simulque australi parti BC pes borealis alterius. Friktioni accedebat pressio aliqua, & non sine mora. Itaque prope pileolum C, contigui erant ambo magnetes, deinde progrediendo ad extremitates & ultra magis subinde, magisque alter ab altero removebantur. Iterum eodem modo simul applicabantur, & frictio uniformis ac simultanea 20 & pluribus vicibus repetebatur. Deinde convertendo acum, ut pileolus C in asserculi cavitatem descenderet, basis altera tunc extans, utroque magnete simul, & utrinque totidem vicibus affricata fuit.

Hæc egit consilium secutus Excellentis MUSEHENBROEKII MARINONIUS ex-

Tab: IX.
Fig: 112.

per

perientia tamen Magistræ præcænet p. 52.

Certè quantumvis subtilitatis & industria impendatur, ut res ex voto succedat, præter materiæ delectum, & idoneam affriccionem magnetis, pars etiam fortunæ non exigua requiritur.

Quoties itaque opus habuerimus acu magnetico, examinanda est primum ad lineam meridiana accuratè inventam. Quodsi vero ab eadem declinet, angulus declinationis in ortum vel occiduum adnotandus, atque in præxi pro exigentia addendus, aut subtrahendus ab angulo invento.

PROBLEMA L.

Tab: IX. 347. Achnographiam areæ $ABCDE$ ex Fig: III. duabus stationibus A & B perficere.

I. Posita mensula in A collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D, E , ducanturque rectæ versus eos ex a .

II. Quærat distantia stationum AB (§. 113.), & in mensulam ex scala geometrica transferatur in $a b$ (§. 237.).

III. Mensula ex A deferatur in B ita, ut punctum cognomine b in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam $b a$ applicata per dioptras collineanti baculus in A delinxi occurrat, atque in eo situ tabulæ.

IV. Ex puncto b in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores lineas in e, d, c intersecant.

V. Denique jungantur puncta a & e , e & d , d & c rectis ae , ed , dc .

Dico

Dico ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Eadem, quæ præcedentis problematis.

Aliter.

I. Goniometricò investigetur quantitas angulorum EAD, DAC & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD & DBC; quaeraturque distantia stationum AB.

II. In charta tandem distantia ope scalæ; anguli ope instrumenti transportatorii determinentur.

PROBLEMA LI.

348. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragraré licet.*

Tab: IX.
Fig: III.

RESOLUTIO

I. Mensula in A collocata collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis bae in eadem designari possit.

II. Longitudo utriusque rectæ AB & AE per §. 113. explorata, transferatur ex scala in mensulam ex a in b, & e (§. 237.).

III. Mensula in B translocetur ita, ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, & alius per dioptras collineantis baculum in A contingat.

IV. Idem visus dirigatur per easdem dioptras in C, ut, sicut ante, angulo ABC æqualis abc, & rectæ BC proportionalis bc in mensula designari possint.

K

V.

V. Quodsi idem cum reliquis angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis. Goniometrico vero anguli & latera mensurata annotantur, & in chartam tandem latera ope scalæ per §. 237, anguli autem per §. 139 transferuntur.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt per constr: Figura igitur delineata est areæ similis (§. 156. 153.).

Aliter.

Quærat longitudo omnium laterum (§. 113.) & quantitas tot angulorum, quot sunt latera demptis tribus (§. 134.). His enim datis Ichnographia per (§. 341.) vi demonstrationis præcedentis absolvetur.

SCHOLIUM I.

349. His legibus non camporum modo, sed Provinciarum quoque descriptio Geometrica continetur. Interim sponte sua manifestum est loca præ cæteris notatu digna vulgò uroce sæcra signis aptis distinguenda, tum etiam scalam, ex qua linearum magnitudo lines affigebantur, figuræ subijciendam esse. Præterea situs plagarum manti auxilium acis magnetica satis probata indicantur. Reliqua bene multa huc spectantia, scilicet de descriptio-

CAPUT

bendis
metru.
in pra.

350

Ex off

curus

acant

quanti

limitu

[kley]

norun

piec k

naroz

cem eo

onem

cumen

Si cni

lapide

in ter

mitibi

niomet

tur in

in cha

jufmo

tum p

351

in can

bendis mappis per lineas ab intra ad perimetrum figuræ ductas, deque colore induendis in praxi docebuntur.

S. C H O L I O N . II.

350. Unum adhuc seriò commendandum. Ex officio ichnographia arearum operam daturus suarum dimensionum rationes non nudè documentis Juridicis subiciat, sed postquam quantitatem superficiei, numerum terminorum limitum [vulgo Kopiec], Arborum terminalium [kazy, zaciosy], distinctionem etiam terminorum, hoc est, utrum terminus lapideus [kopiec kamienny] vel terminus finalis sit [kopiec narożny]? atque distantiam terminorum invicem expresserit, angulorum quoque inclinationem in limitibus intra vel extra figuram, documentis iisdem Juridicis inferendam curet. Si enim vel duo tantum termini limitum eg. lapidei persistant, habita distantia & angulis in terminis limitum, [omnibus etiam aliis limitibus injuriâ temporum collapsis] faciliè Goniometricò anguli & latera figuræ inveniuntur in campo per §. 351; Ichnographia verò in charta per §. 348 perficitur. Atque ejusmodi limitum positio, dicitur positio limitum perpetuò durabilium.

P R O B L E M A . III.

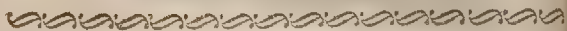
351. Figuræ in charta delineatæ similem in campo designare.

R E S O L U T I O .

K2

Quo-

Quoniam hoc problema est inversum alterius, quod ichnographias arearum investigamus, non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus problematum immediate precedentium intelligitur. Ex. gr. si semicirculo, vel mensula vel pertica utimur, anguli singuli figuræ, aut anguli diagonalibus intercepti &c. in solo designantur per §. 139. & latera vel diagonales &c. per mensuram majorem decenter determinantur.



CAPUT VI.

DE FIGURARUM DIMENSIONE, ADDITIONE, SUBTRACTIONE, MULTIPLICATIONE, COM- MUTATIONE, DIVISIONE.

PROBLEMA LIII.

352. *Invenire aream quadrati.*

RESOLUTIO.

- I. Queratur longitudo lateris (§. 113.).
- II. Hæc ducatur in seipsam (§. 97. *Arit.*).

Fa-

Factum erit area quadrati. ex. gr.

Sit latus quadrati 345, erit area $\text{---} 345 \cdot 345 \text{---}$ 119025.

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot *eg.* Tab: IX.
 digiti quadrati, hoc est: quot quadratula XZ Fig: 113.
 digiti longa & lata in eodem contineantur (§. 106.); evidens verò est, si latus quadrati AB concipiatur in quocunque partes æquales, & quadratum ipsum per rectas puncta divisionum connectentes in lateribus oppositis in quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum XZ series, quot partes latus habet AB, & in qualibet serie reperiri tot quadratula, quot latus BC. vel idem AB habet partes; numerus ergo quadratulorum XZ invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

353. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 135. *Arithm.*). Ex. gr.

Quadratum lateris dupli est quadratulum quadrati lateris simpli, hoc est: si fuerit latus unum ad aliud, ut 1:2, erunt quadrata ut 1:4.

COROLLARIUM II.

354. Si latus quadrati fuerit 10, area erit 100; cum igitur chorda 10 sit perticarum, pertica 10 particularum &c. (§. 20.); chorda quadrata 100 perticas quadratas, pertica quadrata 100 perticulas quadratas, perticula qua-

K3

drata

drata 100 digitos quadratos &c. continet. (§. 106.).

COROLLARIUM III.

355. Quodsi itaque detur numerus in quadratis ultimæ speciei decimalibus, facile is in perticas, perticulas &c. resolvitur, si à sinistra dextram versus binæ notæ rescentur (§. 354.); quæ enim sinistram versus residuæ notæ fiunt, integra erunt (§. 344. *Arithm.*)

Ex. gr. 73480 quadrati faciunt 7 , 34 . hoc est: 7 chorde, 34 perticas, & 80 perticulas quadratas.

COROLLARIUM IV.

356. Quodsi verò detur in rectangulis ultimæ speciei, facile etiam in perticulas, perticulas rectangulares cujusque speciei per §. 218. resolvitur. Ex. gr. $7348 = 7348$ est: septem chorde, 3 pertica, 4 pedes, & 8 digiti rectangulares.

COROLLARIUM V.

357. Cum verò numeri quadrati oriantur si in se ducantur (§. 218. *Arithm.*), area autem est factum laterum (§. 352.), ut in quadratis ultimæ speciei decimalibus obtineatur area,

imò. Fractiones eadem in utroque factore assumendæ, id quod zerorum adjectione opus fuerit, fiet. &c.

2^{do}. Logarithmò eòdem factorum dato-
rum ultima nota facti signanda.

Ex. gr. Sit latus unum area su $\overset{0}{3}, \overset{1}{3}, \overset{11}{4}, \overset{11}{6}$

Tab: IX.

Fig: 114.

aliud sy $\overset{0}{2}, \overset{1}{2}$ five $\overset{0}{2}, \overset{1}{2}, \overset{11}{0}$ (§. 344. Arith:),

erit area 73480, hoc est: 73 millium & 480
particularum quadratarum.

COROLLARIUM VI.

358. Quoniam verò inventa area in re-

ctangulis decimalibus foret $\overset{0}{7}, \overset{1}{3}, \overset{11}{4}, \overset{11}{8}$ aut 7.
3480 (§. 353. Arithm:), id quod habetur ex
decupla progressionè (§. 345. Arith:), quæ
in quadratis in centuplam abit (§. 354):
igitur si rectangulares sive oblongæ fractio-
nes arearum in quadrata cujusque speciei
dispositæ sicut sunt.

imo. Incipiendo ab integris binas notas
dextram versùs pro qualibet specie quadrato-
rum resercentur. &

2^{do}. Logarithmò subduplò datorum una-
quævis nota dextima è binis signanda; & si
quidem fractiones numerò impares forent,
zerus etiam ultimæ notæ adjiciendus.

Ex. gr. In casu dato $\overset{0}{7}, \overset{1}{3}, \overset{11}{4}, \overset{11}{8}$ post adje-

ctum zerum equivalent $\overset{0}{7}, \overset{1}{3}, \overset{11}{4}, \overset{11}{8}, \overset{11}{0}$ (§. 344.

Arith:), proinde erunt $\overset{0}{7}, \overset{1}{3}, \overset{11}{4}, \overset{11}{8}, \overset{11}{0}$ hoc est, 7
K+ chordæ

chorda, 34 pertica, 80 perticula quadrata, ut
etiam §. 357. invenimus;

COROLLARIUM VII.

359. Et cum $7. 348 = 7. 34. 80$ (§.

358.); Ipsa verò $7. 34. 80 = 73480$ (§.

355.), erunt etiam $7. 348 = 73480$ (§. 77.
Ar.). Duo igitur consequuntur:

1^{mo}. Si quadrati in datis speciebus in ul-
timam speciem quadratorum commutandi,
omissis omnibus aliis logarithmicis (sub ultimæ
speciei tantum logarithmo jungendi sunt.
Exemplum videatur §. 355.

2^{do}. Si oblongi in ultimam speciem qua-
dratorum resolvendi; siquidem fractiones
pares forent numero, subduplo logarithmo
ultimæ speciei notandus est numerus datus; si
verò impares, zerus præterea adjiciendus.

Ex. gr. $7. 348$, sive $7. 3. 4. 8. 0$ aqu-

valent 73480 , hoc est: 73 millibus 480 perti-
culis quadratis.

SCHOLIUM I.

360. Hæ sunt triæ, æque miris modis agri-
menforum exercent ingenia. Duplici verò ex
fonte emanant; ex ignorantia scilicet theoria
arithmetice, præsertim fractionum, atque Ge-
ome-

ometria. Cum enim mensura arearum sit quadratum (§. 106.), omnes ferme exterrarum regionum Geometra arcibus in mensuris quadratis definiunt, contra omnibus pene Agrimenforibus nostris in mensuris reſtangularis areas ſupputantibus. Neque alio id modo factum exiſtimo, quàm modica Geometria notitia primorum in regione noſtra Agrimenſorum. Unde tandem longa conſuetudine menſura arearum reſtangularis apud nos uſque hodie obtinent. Ex collatione itaque menſurarum reſtangularium cum quadratis lites, & cum iis errores graviſſimi in placita agrimenſorum irrepſere. Cuiusmodi ſunt Axiomata illa.

I. Factorum & producti eadem eſt ratio.
II. Simile in ſimile ductum ſimiliter producit ſimile.

III. Simile in ſimile ductum diverſimode producit diverſum. &c. & illa theoremata.

I. Linea in lineam ducta ſimpliciter producit vel lineam vel ſuperficiem.

II. Linea in lineam ducta non juncta orthogonaliter producit lineam.

III. Linea in ſuperficiem ducta ſimpliciter producit vel ſuperficiem, vel cubum. &c. &c. quæ tædet referre.

Quidam eorum per calculum ſuum, ſeu ut ipſi vocant, per algorithmum decimalẽ aream,

cujus latera forent 24,5 & 2,4, inveniunt 588 hoc eſt: chordarum quingentarum octoginta octo; quod omnino falſum eſt; nam area vera

eſſet 58. 80, aut 58 80, aut 5880, aut 588

in

in rectangulis (§. 353. Arith.); vel etiam

58, 80, aut 5880 in mensuris quadratis (§. 357, 359.). Satiùs itaque prius theoriæ Mathematicarum, quàm agris meliendis darent operam, ne labore improbo tantam sibi notam adipergerent, & fundi Dominis gravissimo damno forent.

SCHOLIUM II.

Tab: IX. 361. Ut specimen aliquod eorum afferamus, quæ §§. 142, 343 commendavimus, in p/a in area numeri assumpti 7. 348 hunc in modum examinabitur theoria.

I. Id quod asseritur §. 356: datus numerus in rectangulis decimalibus &c. manifestum est ex lege fractionum decimalium (§. 345. Arithm.): Cum enim chorda una abcd contineat in se 10 perticas rectangulares eb, ef, & una eb, ef 10 alias minores epqo, & ita porro;

Erunt $\overset{0}{7} \overset{1}{3} \overset{11}{4} 8 \overset{11}{=} 7348$ (§. 97. Arithm.).
Q. e. unum.

7 chordæ sunt in A, B, C, D, E, F, G, H, I, K.
3 perticæ rectangulares in LMiklmn &c.

Nam quoniam l est æquale vxu4, erunt 6l, sive iklmno \equiv 6vxu4. consequenter quæ u4 & 6 vxu4 erunt 10vx u4, hoc est pertica rectangularis una, sive 3tia, siquidem in L sunt duæ. Perticulæ 4 sunt in N. 8 denique rectangulæ lineæ sunt in P. Q. e. secund.

II. Quadrata cujusque speciei imò chordæ quadratæ 6 in A, B, C, D, E, F. & 7 in G, H, I, K, 2dò Peticæ quadratæ 34 sunt in L, i, k, l, m,

n, o & M, N. Quod enim i oblonga eg. ep

qo æqualeat i quadratæ qr, Et hic per numerum unum, Et per §. 345. Ar: patet. 345. Eodem modò patet 8 tertia oblonga abire in 80 secunda quadrata.

Cum enim i sit pars millesima chordæ (§.

345. Arithm:); siquidem ponuntur 8 longi-

tudinis chordæ, æquivalent 8 oblonga 8000 quadratis (§. 362.); adeoque divisa per 100

efficient 80 quadrata (§. 195. Arithm:). Q. e. tertium.

PROBLEMA LIV.

362. Invenire aream rectanguli, suxy.

RESOLUTIO.

I. Investigetur longitudo laterum su & sy (§. 113.);

II. Ducatur su in sy.

Factum erit area rectanguli.

Ex. gr. Sit su = 334

sy = 220

6680

6680

668

Erit area quadratorum ^{II}73480 (S. 357.)vel ^{IV}73480 linearum rectangularium.vel ^{O I IIII}7348.vel ^{O I II II}73480 (S. 356 & 359.).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ problematis præcedentis & præter §§. citatos (S. 353. *Arithm.*).

Quia tamen mensura arearum est quadratum, missis aliis, quæ lineis indicandis aptissi-

mè inserviunt, formulis eg. ^{O I II III}7348 &c. (S.19. & 20.), hac ^{O I II II}73480 expressione quantitatis arearum in posterum utemur. (S. 106.).

COROLLARIUM I.

Tab. IX. 363. Igitur rectangula eg: sd & dy sunt
 Fig. 114. in ratione composita suorum laterum videlicet st & sc, item cd & cy; hoc est erit Rect: sd: dy = 200: 20 (S. 135. *Arith.*).

COROLLARIUM II.

364. Si ergo fuerint tres lineæ continuè proportionales; Quadratum mediæ rectangulo,

gulo extremarum est æquale (§. 270. *Arit.*).

COROLLARIUM III.

365. Si vero fuerint 4 rectæ proportionales; rectangulum sub extremis æquatur rectangulo sub mediis (§. 269. *Arit.*).

COROLLARIUM IV.

366. Quare si ex eodem puncto A ducan-Tab: VIII.
tur duæ rectæ, quarum altera AD circum Fig: 102.
tangit, altera AB secat; erit quadratum tan-
gentis AD rectangulo sub secante AB & ejus
portione extra circum AC æquale (§. 318,
364.).

COROLLARIUM V.

367. Si duæ vel plures secantes GL & GM Tab: VIII.
ex eodem puncto G ducantur; erunt rectan- Fig: 97.
gula sub totis, & earum portionibus extra
circulum æqualia (§. 317, 365.), hoc est erit
 $GMGO = GLGN$ (§. 60. *Arith.*).

COROLLARIUM VI.

368. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo Tab: I.
secant in K; erunt rectangula sub segmentis Fig: 14.
inter se æqualia (§. 316, & 365.), id est HK
 $KM = LK KI$ (§. 60. *Arit.*).

COROLLARIUM VII.

369. Si lignorum strues metiretur ex. gr.
peaius, & orgyæ area (quæ quadrati aut re-
ctanguli figuram habet) metiretur etiam pe-
dibus,

dibus, per orgyæ aream si area seu factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur, quotus indicat, quot ipsa orgyæ contineat. (§. 61. *Arith.*).

Ex. gr. Si area struis est 180 pedum, & area orgyæ 36 pedum, (§. 380. *Ar.* & 352. *Geom.*) esset $180 : 36 = 5$. Esset ergo area struis lignorum 5 orgyarum quadratorum.

SCHOLIUM.

370. *Præxi geometricæ operam daturus nosse præterea debet, quot chordæ secundum morem provincie mansum constituent.* Włoka Litewika ma w sobie morgow 30, Morgow sznurów 3. Będzie zatym miała włoka Litewika sznurów 90, pośpolicie zaś 3 wśzerz, trzydzieści sznurów wdłuż; sznur jeden się dzieli na 10 prętów, pręt na przeciętek 10, przeciętek na 10 ławek, albo raczy linii, ponieważ sznur jeden ma łokci w sobie Litewickich Wileńskich 75, pręt będzie miał

$\frac{1}{7}$ —. Przeciętek — łokcia, albo 3 ćwierci. $\frac{2}{4}$ —. Linia — łokcia, albo cal 1. — (§. 270. *Arith.*) &c.

Będzie zatym włoka Litewika miała łokci kwadrato wych 506250. stop zaś kwadrato

2,025,000; bo wśzerz sznury trzy czynią łokci 225, wdłuż sznurów 30 czynią łokci

2250.

2250. Morg zaś jeden lokci 16875. sznur
lokci 5625. &c. *Sed utinam aliquando le-
ges Patriæ certi aliquid de mensuris defini-
rent; præter eas enim inveniuntur in bonis qui-
busdam quæadmodum ex antiquis, ut vocant, do-
cumentis constat mensuræ agrorum suzba, zere-
bia &c. sic dictæ; de quibus ex Jure Luthvania
nihil certi haberi potest.*

*Accuratius ea res legibus Polonia definita,
quas collegit insignis Geometra R. P. SOL-
SCIUS S. J. Videatur ergo is sub titulo Ge-
ometra y Architekt Polki Zabawy XI. Roz-
dział V. & sequent: p. 144.*

THEOREMA LVI.

371. Duo parallelogramma $ABDC$ & E
 CDF super eadem basi CD & inter easdem
parallelas AF & CD constituta sunt inter se
equalia.

Tab: XI.
Fig: 115.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD , itemque EF & CD
sunt latera opposita parallelogrammi per hy-
poth: erit $AB = CD$ & $EF = CD$ (§. 319.);
consequenter $AB = EF$ (§. 77. Ar.);
& hinc porro $AE = BF$ (§. 78. Arithm.).
Quoniam porro $AC = BD$ & $CE = DF$
(§. 319.), erit $\triangle ACE = \triangle BDF$ (§. 159.),
adeoque $ABGC = FECD$ (§. 81. Arithm.);
consequenter $ABDC = CEFD$ (§. 78. Ar.).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

372. Ergo & triangula super eadem basi & inter eadem parallelas æqualia sunt. Nam parallelogrammum ACDB \equiv parall: ECDF

(§. 371.), sed \triangle ACD \equiv $\frac{1}{2}$ parall: ACDB

& \triangle FCD \equiv $\frac{2}{2}$ parall: ECDF (§. 320, &

321.). Ergo \triangle ACD \equiv \triangle FCD (§. 155).

COROLLARIUM II.

373. Quoniam FH est altitudo tam parallelogrammi CEFD, quam \triangle CFD (§. 197.) AC verò ejusdem parallelogrammi & \triangle EFC, item parallelogrammi ABCD, sitque AC \equiv FH (§. 196.), patet adeo *Parallelogramma & triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse* (§. 371. 362.).

PROBLEMA LV.

Tab X.

Fig. 116.

374. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, seu parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

I. In CD pro basi assumptam demittatur perpendicularum AE (§. 187.), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 197.).

II. Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD \equiv 456

AE \equiv 234

1824

1368

912

0 1 11
10, 67, 04

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis AC, HF (§. 373.), sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 362.). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 77. *Arithm.*). Q. e. d.

Tab. X.
Fig. 116.
115.

COROLLARIUM I.

375. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 135. *Arit.*), adeoque & triangula eorum dimidia (§. 321.) in eadem existunt (§. 155. *Arit.*).

COROLLARIUM II.

376. Ergo si altitudines sint æquales, basium, si bases sint æquales, altitudinum rationem habent (§. 155. *Arit.*).

COROLLARIUM III.

377. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 271. *Arith.*).

COROLLARIUM IV.

L 378.

Tab. X.
Fig: 115.

378. Facilis ergo parallelogrammorum æqualium commutatio data alterius basi vel altitudine. Ex. gr. Sit $AC = 6$ pedum, CD altitudo $= 4$. Sit alterius parallelogrammi basis $CE = 8$ pedum; queratur altitudo EF sitque $= X$; siquidem æqualia debent esse parallelogramma.

Erit $4 \cdot 6 = 8 \cdot x$ proinde
 $8 : 6 = 4 : 3$ (§. 271. Arith.). Er
ergo $ED = 3$ pedibus.

PROBLEMA LVI.

Tab. X.
Fig: 117.

379. Invenire aream trianguli.

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

I. Multiplicetur basis AB per altitudinem CA , erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 362.).

II. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area trianguli ABC (§. 321.).

Aliter.

Basis dimidia — AB multiplicetur per altitudinem CA , vel basis AB per altitudinem dimidiam — CA . Factum erit area trianguli. Nam hoc etiam modo dimidium parallelogrammi obtinetur (§. 321, 362.).

COROLLARIUM I.

CAP. V. DE FIG. DIM. ADD. SUB. MUL. COM. DIV.

380. Hinc facilis Δ in parallelogrammum commutatio.

Erit enim $\Delta ACB \equiv$ parallelogrammo ACFG, vel ADEB. & e contra parallelogrammum in triangulum commutabitur, si dimidiam sumatur.

COROLLARIUM II.

381. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 271. *Arithm.*); consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 153. *Arit.*).

COROLLARIUM III.

382. Hinc Δ unum in aliud alterius basis, vel altitudinis commutari potest (§. 378.).

COROLLARIUM IV.

383. Si area trianguli per basim dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 184. *Arithm.*).

PROBLEMA LVII.

384. Invenire latus quadrati parallelogrammi vel triangulo dato æqualis.

RESOLUTIO.

Queratur inter basim & altitudinem parallelogrammi, vel inter dimidiam basim & altitudinem, aut integram basim & dimidiam altitudinem trianguli media proportionalis per §. 308, aut in numeris per §. 274. *Arit.*

L2

L3

Ita prodit latus quadrati quæsitum, super quo
si excitetur quadratum, erit parallelogrammum
vel \triangle æquale.

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit
aream parallelogrammi (§. 362, 374).

Factum ex dimidia basi in altitudinem,
ex dimidia altitudine in basim aream trian-
gli (§. 379.); cum adeò quadratum linearum
numeri reperti sit in utroque casu factum
æquale (§. 364, & 270. *Arithm.*); erit qua-
dratum istud in priori casu parallelogrammum
in posteriori triangulo æquale. *Q. e. d.*

PROBLEMA LVIII.

385. *Invenire aream polygoni irregularis
ac trapezii.*

RESOLUTIO.

Tab. X.
Fig. 118.
n. 1.

I. Resolvatur per diagonales AD & AC
triangula.

II. Inveniantur areæ singulorum trian-
golorum (§. 379.).

III. Et addantur.

Erit summa areæ quæsitæ (§. 85. *Arithm.*)

Tab. X.
Fig. 119.

Quodsi — CE multiplicetur per summa

altitudinum DF + GA; vel integra CE

— (DF + AG): prodabit area Trapezii

DC.

Super quo
ogramme
o.
nem exp
62, 374
dinem,
m triang
linea,
i facto
erit q
logramm
e. d.

$$\text{Ex. gr. } DF = 35, \text{ vel } \frac{1}{2} EC = 43$$

$$GA = 45, DF + GA = 80$$

$$DF + GA = 80 \quad AEDC = 34, 40$$

$$(DF + GA) = 40$$

$$CE = 86$$

VIII.

$$AEDC = 34, 40$$

irregula

D & A

m trian

35. Arith

per sum

gra CE

Trapezū

Es

Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 196, 197.); consequenter Trapezii area habetur ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 379.).

Tab: X.
Fig: 120.

$$\text{Ex. gr. Sit } AB = 246, CD = 378, BF = 195;$$

$$\text{erit } \frac{1}{2}(AB + CD) = 312$$

$$BF = 195$$

$$1560$$

$$2808$$

$$312$$

$$L4$$

$$6,08,40.$$

6,08,40.

COROLLARIUM I.

386. Trapezium ergo parallelorum
rum æquale est triangulo, cujus basis est
ma parallelorum laterum, & altitudo est
trapezii (§. 379.), adeoque in illud con-
tari potest.

Et è contra si trianguli basis pars qua-
dummodo non dimidia, pro uno, & pars al-
pro altero latere parallelo trapezii, servati-
dem altitudine trianguli, ponatur, triangu-
in trapezium migrabit.

COROLLARIUM II.

387. Hinc facile trapezia in rectan-
(§. 380.), imò in quadrata (§. 384.) co-
mutantur.

COROLLARIUM III.

388. Quodsi verò bases omnes trian-
rum, in quæ resolvitur polygonum irregu-
sumantur pro basi una, & areæ triangulor-
inventorum pro, area unius alicujus
trianguli (§. 85. *Arithm.*), illius altitudo
bebitur, si per dimidiam summam basium
ventorum triangulorum dividatur area eo-
dem (§. 383.); adeoque quodlibet poly-
num irregulare potest in triangulum con-
ti. Data enim basi & altitudine triangu-
mnis generis etiam datorum angulorum
gulum construi potest per §. 372.

Quodsi etiam per assumptam pro arbitrio
basim dividatur area; prodibit etiam altitudo
rectanguli (§. 184. *Arit.*).

I.

COROLLARIUM IV.

lorum ha
afis est
tudo ead
ud comm
389. Convertetur ergo polygonum irregulare in triangulum vel rectangulum, jam commutato. Figurarum
verò rectangulum vel triangulum in quadratum (§. 384.); ergo polygonum irregulare
etiam in quadratum converti potest (§. 77. *Arit.*).

rs quae
c pars al
, servat
triangu

THEOREMA LVII.

II.

rectang
384.) co

390. In parallelogrammis & triangulis
similibus altitudines sunt lateribus homologis
proportionales; & bases ab iis lateribus pro-
portionaliter secantur.

DEMONSTRATIO.

III.

s triang
n irreg
triangul
cuius
altitudo
b basium
area ead
bet poly
lum com
triangu
torum

Cum altitudines AE. & ae sint ad bases CD Tab. X.
& cd perpendiculares (§. 197.), erunt E Fig: 116.
& e anguli recti (§. 67.); adeoque æquales
(§. 127.). & quia parallelogrammum ABDC
ipsi abdc, & triangulum CAD ipsi cad simi-
le per hypoth: erit $C = c$ & $A = a$ (§.
253.). Quare $AC : AE = ac : ae$ (§. 230.).
Est verò etiam $AC : CD = ac : cd$ (§. citt.).
Ergo $AE : CD = ae : cd$ (§. 171. *Arit.*).

Q. e. unum.

Quoniam $\triangle CAE \sim cae$ per demon: & hyp:
erit $AC : CE = ac : ce$ (§. 153.). Est verò
etiam $AC : CD = ac : cd$ (§. citt.); ergo

L4

CE:

CE: CD = ce: cd (§. 171. *Ar.*); adeoque
 ED: CE = ed: ce (§. 168. 144. *Arith.*);
 e. alterum.

Eodem modo generaliter patet recta
 quascunque in figuris similibus eodem modo
 determinatas tum inter se, tum ad latera ho-
 mologa eandem rationem habere.

COROLLARIUM I.

391. Quoniam parallelogramma & trian-
 gula sunt in ratione composita altitudinum &
 basium (§. 375.), similia verò habent bases
 altitudinibus proportionales (§. 390.); igitur
 parallelogramma & triangula similia habent
 rationem duplicatam homologorum laterum
 (§. 135. *Arithm.*). Et eodem modo patet
 quod etiam sint in ratione duplicata altitudi-
 num ac segmentorum baseos; imò linearum
 eodem modo pro arbitrio determinatarum
 (§. cit.).

COROLLARIUM II.

392. Sunt ergo ut quadrata laterum, alti-
 tudinum & segmentorum basium homologorum;
 nec non linearum eodem modo, ut libere
 determinatarum (§. 353.).

THEOREMA LVIII.

Tab. X. 393. In parallelogrammo AD complemen-
 Fig: 121. ta DO & AO eorum, quæ circa diametrum
 existunt, sunt æqualia.

DEMONSTRATIO.

\triangle enim $ACB = \triangle BCD$, & $\triangle BLO =$
 $\triangle BOI$, & $\triangle OEC = \triangle OCF$ (§. 320.).
 Quare $ACB - BLO - OEC = BCD -$
 $BOI - OCF$ (§. 81. *Arithm.*), hoc est: AO
 $= OD$. *Q. e. d.*

P R O B L E M A L I X.

394. *Rectangula & quadrata sibi addere,*
aut unum ex alio subtrahere.

R E S O L U T I O.

Ex. gr. Sint addenda sibi rectangula AL
 & MN .

Tab: X.
 Fig: 122.
 123.

I. Jungatur altitudo altitudini in ML , &
 basis basi in LN .

II. Protendatur NF in G , ut fiat altitudini
 alterius rectanguli LI æqualis.

III. Ducatur diagonalis LG , &

IV. Per punctum intersectionis S ducatur
 OP parallela ipsi IL (§. 219.).

Erit $APOK = AIKL + MN$ (§. 393.).

Sit subtrahendum quadratum bd ex re-
 ctangulo $AIKL$.

Similiter.

I. Ponatur bd intra rectangulum AL ita,
 ut altitudo altitudini, & basis basi conjunga-
 tur.

Tab: X.
 Fig: 121.

II. Protendatur bc in e , donec basi alterius
 rectanguli sit æquale, &

III. Cætera, fiant ut ante.

Erit $AIKL - bd = AI$ st (§. 393.).

SCHO-

S C H O L I O N.

395. Facile patet parallelogramma quæ possent sibi addi & subtrahi, sed curandum primo, ut anguli homologi utrisque, sint æquales; id quod obtinetur per theorema LVI §. 371.

C O R O L L A R I U M.

Figurarū. 396. Cū triangula & polygona in parallelogramma & quadrata commutari possunt (S. 389.), quævis figuræ sibi addi & subtrahi possunt, si per prius convertantur in quadrata aut parallelogramma.

Ad praxim commodè applicaretur problema, quodby trzeba było zamianę dawać za szachownice w jednym polu.

T H E O R E M A L I X.

Tab. VIII.

Fig: 104.

397. Figura regularis $ABCDE$ ex centro circuli circumscripti F in triangula equalia & similia resolvitur; & area ejus æqualis triangulo, cujus basis peripheria totius polygoni $AB + BC + CD$ &c. altitudo perpendicularium FG ex centro F in locum unum adductum. Idem valet de area circumscripta nisi quod altitudo sit radius.

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam $AB = BC = CD = DE = EA$ (S. 94.), & $FA = FB = FC = FD = FE$ (S. 32.), triangula AFB , BFC &c. æqualia & similia sunt (S. 159.). Q. e. unum

Con-

Constituuntur triangula AFB, BFC, CFD Tab: X.
&c. in quæ resolutum est polygonum super eadem recta AZ (§. 176.). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 216.) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Fig: 125.

Erit AfB = AFB, BfC = BFC, CfD = CFD &c. (§. 373.); consequenter AfZ = AFB + BFC + CFD &c. (§. 85. Arit:) æqualis areæ polygoni regularis (§. 77. Ar.).
Q. e. secundum.

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g Tab: VIII,
ducta sit radius, & ad latus æ perpendicularis Fig: 104.
ris (§. 289.), erit ea altitudo trianguli aFe (§. 197.). *Q. e. tertium.*

PROBLEMA LX.

398. Invenire aream polygoni regularis.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Inveniatur vel per §. 385. vel

I. Latus polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus hexagoni per tria; ut prodeat semiperimeter, seu dimidia basis polygoni. Tab: VIII. Fig: 104.

II. Factum porro ducatur in perpendicularum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit areæ quæsitæ (§. 379.).

Ex. gr.

AB = 54

Dimidius numerus laterum

1
2
2

	27
	108
	<hr/>
Semiperimeter	135
Latus FG	29
	<hr/>
	1215
	270
	<hr/>
Area Pentagoni	39,15

THEOREMA LX.

Tab IX.
Fig: 107.

399. *Quadrilatera & polygona similia tam regularia, quam irregularia ABCDE & abcde per diagonales AC, AD & ac, ad in similia triangula ABC & abc, ACD & acd &c. dividuntur inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Cum ABCDE & abcde sint similes per hypoth: anguli A & a æquales (§. 153.); sed præterea diagonales AC, AD & ac, ad æqualibus A & a ad æquales etiam D & d ducuntur, adeoque $\triangle ABC$ & abc , $\triangle CAD$ & cad , $\triangle DAE$ & dae eodem modo determinantur (§. 107.); consequenter & inter se similia sunt, & similes partes figurarum existunt (§. 108, 156, & §. 8. Arithm.). *erāt primum.*

Cum verò sit etiam.

ABCDE:

27

108

—

1

135

1

29

—

215

70

—

01

2,15

—

K.

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

ABCDE: $\triangle ABC \equiv abcd$: $\triangle abc$ &c.ABCDE: $\triangle DCA \equiv abcd$: $\triangle dca$ &c. (§. 145. *Ar.*), erunt $\triangle\triangle$ dicta totis proportionalia. *Q. e. 2^{da}um.*Consequenter ABCDE: $abcd \equiv \triangle ABC: \triangle abc$ & ABCDE: $abcd \equiv \triangle DCA: \triangle dca$ (§. 148. *Arith.*), igitur $\triangle ABC: \triangle abc \equiv \triangle DCA: \triangle dca$ $\equiv \triangle DAE: \triangle dae$ (§. 141. *Arith.*), hoc est: $\triangle\triangle ABC, ACD, ADE$ & abc, acd, ade sunt inter se proportionalia (§. 132. *Arithm.*).*Q. v. tertium.*

Eadem est demonstratio pro regularibus polygonis.

THEOREMA LXI.

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

400. *Figuræ similes sunt inter se in ratione duplicata laterum homologorum; sive ut quadrata laterum homologorum.*

DEMONSTRATIO.

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

Sint Figuræ ABCDE & $abcd$ sive regulares sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ sive polygonæ quæcunque ejusdemordinis; erit: ABCDE: $abcd \equiv \triangle ABC: \triangle abc \equiv \triangle ACD: \triangle acd$ (§. 399.), sed \triangle $ABC: \triangle abc \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$ &c. (§. 392.), ergo ABCDE: $abcd \equiv AB: ab \equiv BC: bc$

SCHO.

S C H O L I O N.

401. Eodem modo ostenditur figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis equalibus distarum, vel hinc aliarum quorumcumque eodem modo intra eas determinatarum (§. 156.). Dicere verò in ratione duplicata, sive figuras similes esse inter se, ut quadrata laterum homologorum, idem sonat (§. 353.).

C O R O L L A R I U M I.

402. Cum scalæ omnes geometricæ sint sibi similes (§. 21. *Arithm.*), quavis scala figuræ datæ similis describetur. Facile igitur est figuras quasvis, mappas etiam augere vel minuire in ratione duplicata; scalis enim tantum opus est duplis, triplicis &c. ut latera & diagonales mapparum duplicentur, triplicentur &c. *Ex. gr.* Si fuerit scala una ad alteram, ut 2: 1. mappa prior ad posteriorem erit, ut 4: 1. & si, ut 4: 1. + erunt mappæ: ut 16: 1. si scala priore seu simplâ utaris.

C O R O L L A R I U M II.

403. Quod si itaque dupla, tripla, &c. prioris mappa describenda sit, apparebit, quot paginæ chartæ opus sit pro spatio scilicet, quod occupabit.

Ex. gr. Si ex phylura in quartam partem phyluræ mappa transferenda sit; assumatur scala subdupla prioris, nam erit prior ad posteriorem ut 4: 1. (§. 400.).

CO.

COROLLARIUM III.

404. Quodli in quacunque data ratione augendæ vel minuendæ figuræ similes. *Ex. gr.* Si petatur Δ dati y simile, sed triplum z; inveniatur inter dati trianguli basim d, & ejus triplam g, media proportionalis (§. 308.), super qua si construatur Δ simile dato z (§. 220.), erit hoc triplum dati Δ y. Nam quia d: f = f: g per hypoth. (§. 329. *Methodi Mathematicæ*); erit d: g = dd: ff (§. 190. *Arithm.*); sed etiam y: z = dd: ff (§. 400.); consequenter y: z = d: g (§. 141. *Arith.*); cum igitur sit d: g = 1: 3. per constr: erit etiam y: z = 1: 3 (§. 128. & 141. *Arith.*).

Tab: X.
Fig: 126.

Figurarum
multipli-
catio &
divisio.

COROLLARIUM IV.

405. Pro polygonis irregularibus multorum laterum, & pro mappis augendis vel minuendis, potius super media proportionali inter latera duo homologa, vel diagonales, aut inter scalas inventa, scala construatur, & juxta data vel assumpta prioris scale latera & diagonales figura describatur. *Ex. gr. si inter CD & ejus triplam CL inveniat media proportionalis, super qua construatur scala, erit prior mappa scalâ CL descripta ad posteriorem ut 1: 3 (§. 402, 404.). si utrique mappæ scalam simplicem CL subjeceris,*

Tab: IV.
Fig: 67.

Unde etiam innotescit quantitas chartæ, qua scilicet opus, ut mappa duplô, triplô &c. major data evadat.

SCHOLION.

406.

406. Mappa augenda, vel minuenda vocatur reducenda; altera verò ad quam reductio fieri debeat, reducta appellatur. Reducuntur quoque mappæ ad majores, vel minores per parallelogrammum graphicum Celeberrimi R. P. Territorio CHRYSOPHORI SCHEINERI & S. J. in operis ante sæculo præcedente inventum atque descriptum eptum in eximio libello (a), cujus fabrica, quæ his temporibus non nihil variatam non minus, vel copiosè, quàm eleganter suo more tribus modis. Hæc dis exponit Clarissimus MARINONIUS (b) in mappæ

Reductio verò unius mappæ ad aliam, cujusmodi fieri possit quo ad aream & quò ad spatium eadem tantum quod occupat, probe tenendum est. Quod de scalis mappæ subiciendis in ipsa venit ita solutione questionis §§. 402, 405. monuimus. Mappæ scilicet reductæ quò ad aream multiplicatam scala simpla, sed quò ad spatium tantum reductæ scala multipla subiicienda; Et contra. Non a mappæ reductæ ad aream submultipлам scale præse multipla, sed ad spatium tantum submultipла scale reductæ scala etiam submultipла apponenda erunt.

Tab: IX.

Fig: 113.

Ita si quadrata xx & $ADCB$, quæ supra describere latera homologue mapparum excitata forent longiora ($S. 400.$); metiaris scala sc; apparebit quadratum $ADCB$ noncuplò majus quadratò xx ; sine mappis què constabit novies majori charta opus esse. Quod si verò scala SC exploraveris quadratum xx ; inveniatur xx novies minus quadratò $ADCB$. Sed si quadr. xx scala metiaris sc, quadr. $ABCD$ scala SC ; spatia diversa, atque tamen æquales unum scilicet pedem, ad chordam reperies.

(a) CHRYSOPHORI SCHEINER S. J. diam. Pantographice Roma 168.

(b) DE RE ICHNOGRAPHICA p. 267. (c)

da voca- *Paulò aliter, quàm nos, de spatio occupando*
 reductio- *per mappas reductas in ratione scalarum sen-*
 ducuntur- *tit laudatus MARINONIUS; inquit enim (c):*
 er parva- *In mappis inæqualibus & similibus ejusdem*
 mi R. p- *Territorij, Dominij &c. proportio scalæ ma-*
 S. J. in- *ioris ad alteram minorem solummodò respicit e-*
 sé deseri- *arum extensiones in longitudinē; siquidē utri-*
 fabrica- *usq; un⁹ est valor, idemquē numero hexapeda-*
 on milti- *rum, vel decēpedarum æqualium utriq; adscri-*
 ribus mo- *bent. Habeat enim scala 1000 decēpedarum eg.*
 US (b) p- *mappa formæ majoris longitudinem integri-*
 liam circ- *pedis, & in simili altera formæ minoris scala to-*
 id spatium *dem hexaped: contracta fuerit ad 4 pollices.*

idum it- *2*
 n ipsa est itaque scala minor — majoris; ideoquē
 conuin- *5*
 am mult- *intelligetur: in hac ratione prodiisse mappam*
 n tantu- *ductam.*
 Et contra- *Non dixerim tamen humani aliquid passum in*
 lam sca- *præsertim non admodum obscura, sed poti-*
 multipli- *us id velociori calamo ex aliis eadem trans-*
 ponenda- *ienti reiquē examen strictius prævertenti*
 qua sup- *scribendum puto. Enimverò cum non so-*
 ta fore- *longitudines, sed latitudines quoquē sca-*
 bit quæ- *definiantur (S. 106, 235.), siquidem de*
 xx; si- *mappis similibus sermo est; si fuerit scala una*
 opus e- *alteram ut 2 ad 5, erit mappa ut 4 ad 25*
 is qua- *nam quò ad spatium; cum mappæ similes*
 dratio- *etiam similia non occupare non possint*
 aris sc, *(S. 26.).*

THEOREMA LXII.

407. *Circuli & figuræ similes ipsis inscri-*
Paulò vel circumscriptæ sunt inter se ut quadra-
 VER S. *diametrorum.*

267. (c) *Locò cit. p. 279.* M. DE.

DEMONSTRATIO.

Tab: I.
Fig: 8.

Ponamus describi duos, circulos, & iis circumferibi quadrata; omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 107, & 336).
sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 108.). Consequenter quadrata circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent §. 126, 145. *Arithm.* hoc est: si ponatur circulus major C, minor arcus & quadratum majus Q, minus q; erit

$Q : C = q : c$; igitur & $Q : q = C : c$ (§. 148. *Arithm.*). Circuli itaque inter se sunt ut quadrata diametrorum. *Q. e. unum.*

Eodem modo ostenditur; figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas esse a circulis, quibus inscribuntur, vel circumscriptis buntur (§. 145. *Arithm.*); sed circuli ut quadrata diametrorum *per demonstr.* ergo figuræ ipsis inscriptæ vel circumscriptæ miles sunt ut quadrata diametrorum (§. 141. *Ar.*). *Q. e. alterum.*

COROLLARIUM.

408. Sunt ergo circuli in ratione duplicata diametrorum (§. 353.), adeoque eundem dii sint ut diametri (§. 31, & 155. *Arithm.*) sunt etiam in ratione duplicata radiorum 141. *Arithm.*).

THEOREMA LXIII.

409. Circulus æqualis est triangulo, cuius basis peripheria, altitudo radio æqualis.

DE

I O. DEMONSTRATIO.

& iis concipiatur peripheria circuli in partes num-
bique erit infinitas, inter se æquales, adeoque in-
7, & 336 finitè parvas divisa; arcus infinitè exigui ab
se finitè supra chordam cognominem excessus erit
ta circuli quovis dato minor, seu inassignabilis; adeoque
dem ratio vera nullus.

Arithm. Concipiantur porro ex centro C ad extrema
C, minor arcus infinitè parvi ab ducti radii Cb & Ca;
erit erit angulus aCb infinitè parvus, adeoque a
= C: c & b non different à recto (§. 207.), conse-
quenter si ab sumatur pro basi, erit radius aC
e. unum trianguli abC altitudo (§. 198.). Cum adeo
ras similitudinea circuli resolvatur in istiusmodi triangu-
tas esse a numerò infinita, quorum altitudo commu-
circumscriptis est radius aC, bases verò simul sumptæ sunt
circuli inæquales peripheriæ circuli *per demonstr.* erit
monstr. ille æqualis triangulo, cuius basis peripheriæ
inscriptæ circuli, altitudo radio æqualis (§. 397.). Q.
m (§. 397.).

COROLLARIUM I.

M. 410. Sunt igitur circuli in ratione compo-
sita peripheriarum & radiorum (§. 375.), hoc
est: si circulos designent C & c, peripherias P
& p, radios R & r, erit

C: c = RP: rp (§. cit: & 60 Ar.).

Sed C: c = R²: r² (§. 408.).

Quare RP: rp = R: r (§. 141. Arith.).

Consequenter P: p = R: r (§. 160. Arith.).

Sunt itaque peripheriæ inter se ut radii (§.
126. Arithm.).

DE M2 CO.

Tab: I.

Fig: 4.

COROLLARIUM II.

411. Cum adeo sit $P:R = p:r$ (§. 148. Arithm.) five $P:2R = p:2r$ (§. 159. Arithmet.) erit ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 31.) in omnibus circulis eadem.

COROLLARIUM III.

Tab. X.

Fig. 127.

412. Cum eadem demonstratio de sectoris circuli procedat; sector circuli ACD æquale est triangulo, cujus basis arcus AD, altitudo radius AC.

SCHOLIUM.

413. Facile ergo area circuli inveniri (§. 409.) si ratio vera daretur peripheriæ ad diametrum. Verum etsi in quadrando circulo ab omni ævo, quod Geometria exculta præstantissima desudavit ingenia, perfectam tamen quadraturam in numeris finitis non adhuc dedit; ut ut nostra præsertim ætate inveniendi optime promota fuerit. Rationes tamen diametri ad peripheriam in numeris propè veris dederunt multi. Inter alios Archimedes, Ptolomæus, Vieta, Hugenius; præsertim Adrianus Metius & Ludolphus Ceulen plus cæteris & accuratius ea superlabordrunt. Quibus autem viis ad id pervenerint, præmittenda sunt quædam.

THEOREMA LXIV.

414. Polygonum inscriptum minus, circuli scriptum majus est circulo. Similiter polygonum

II.

.148. Ar.

rithmet.

seu diam.

eadem.

III.

de secta

ED æqua

D, altitu

perimeter

perimeter minor, hujus autem perimeter maior peripheriâ circuli.

DEMONSTRATIO.

Tab: VIII.

Fig: 104.

Latera AB, BC, CD &c. Polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 323.), sed chordæ sunt arcubus minores (§. 170.); ergo singula polygoni latera AB, BC &c. sunt singulis arcubus ipsdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheriâ minor (§. 85. Ar.). Q. e. 1mum.

Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt, area polygoni parti circuli congruit (§. 3.), adeoque ipsi æqualis est (§. 145.); consequenter polygonum circulo inscriptum est minus eodem circulo (§. 18. Arithm.). Q. e. 2dum.

Latera polygoni circumscripti ab, bc, &c. tangunt circulum (§. 336.), adeoque tota extra eum cadunt (§. 39.); consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 8. Ar: 23. Geom.); hinc ipsi æqualis (§. 145.), hoc est: circulus polygono circumscripto minor (§. 18. Ar:). Q. e. 3tium.

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita circuli radii & perimetrorum (§. 397, 409, 375.); hoc est: ad factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 35. Ar:); consequenter illa ad hanc, ut illius

M₃

peri-

perimeter ad hujus peripheriam (§. 157. *Ar.*)
sed polygonum hoc majus circulo per dem
Ergo & ejus perimeter major peripheriâ
culi (§. 126. *Ar.*). Q. e. 4tum.

THEOREMA LXV.

Tab: X. 415. In triangulo rectangulo ABC, Quo
Fig. 128. dratum hypotenuse AC æquale est quad
tis laterum AHIB & BCED simul sumptis

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF; itemque BK
pfi CF parallela (§. 219.). Quoniam \triangle A
cum parallelogrammo CEDB (§. 90.) sum
eadem basi & inter easdem parallelas exte
hujus dimidium est (§. 372.).

Ex eadem ratione \triangle BCF est dimidiu
parallelogrammi LCFK. Enimverò quia
= 0 (§. 84. 127.); adeoque $x + y = 0$
y (§. 78. *Ar.*), & $BC = CE$, $AC =$
(§. 84.); ideo $\triangle ACE = \triangle BCF$ (§. 159.
consequenter $BCED = LCFK$ (§. 78. *Ar.*)

Eodem modò ostenditur esse $AHIB =$
LKG. Quamobrem $BCED + AHIB =$
FK + ALKG (§. 78. *Arithm.*) = AC
(§. 85. *Ar.*). Q. e. d.

SCHOLIUM.

416. Inventor hujus Theorematis est
tiquissimus Philosophorum Samius ille P
THAGORAS, qui etiam primus ludum
peruit, in quo Juventus tam honestas tam
no-

157. *Arithmeticae artes addisceret. Idem incommensurabiles magnitudines & regularia quinque corpora primus detexit. Et Arithmeticae quidem ita coluit, ut omnis prope ratio philosophandi illi ex numeris tueretur. Geometriae vero, ut refert Lærtius, à materia abstraxit primus; in qua mentis elatione præterea complura etiam Theorema XXVI (§. 207.) invenit. Propter quæ, sed præsertim propter Theorema præsens celeberrimus. Ipse vero hujus inventionis tantæ latitudinis affectus est, ut teste Apollodoro apud Lærtium heuatiomben, hoc est: centum bouum sacrificium immolaret. Ideo ergo Theorema hoc pythagoricum dicitur, & amplissimi per Matheſim universam est usus.*

COROLLARIUM I.

417. Quadratum construatur duobus aut pluribus datis simul sumptis æquale, si 1^{mo} latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 216.). 2^{do} super data hypothenuſa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.); ducaturque hypothenuſa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$, & $BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 415.). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ (§. 14. Ar.).

COROLLARIUM II.

418. Siquidem circuli sunt ut quadrata diametrorum

M₄

metro-

Tab XI.
Fig: 129.

metrorum [S. 407.]; facilis etiam erit additio circularum. Est enim circulus diametrò BD. descriptus æqualis 3bus aliis, diametris AB, AC, & CD, descriptis. Circulus diametrò BD descriptus est ad alios

$$C : c + c + c = BD^2 : AB^2 + AC^2 + CD^2$$

$$[S. cit.]. \text{ Sed } BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$$

$$[S. 417.]. \text{ Ergo } C = c + c + c [S. 417. \text{ Arithm.}]$$

COROLLARIUM III.

Tab. X.

Fig. 126.

419. Eòdem modò figuræ similes aliæ pot sunt addi. *Ex. gr.* Si trianguli y basis d jungatur ad angulum rectum in triangulo x, & super hypotenusa hy tanquam basi triangulum S simile ipsi triangulo y construat; erit ΔS duplum trianguli y. Nam eòdem

$$\text{modò } \Delta S : \Delta y = hy^2 : d^2 [S. 400.]$$

$$hy^2 = 2d^2 [S. 413.]; \text{ igitur } \Delta S = 2\Delta y [S. 126. \text{ Arith.}]$$

Sed pro polygonis irregularibus, & mapis satius scalæ ad angulos rectos jungenda & hypotenusa pro scala sumenda [S. 405.]

COROLLARIUM IV.

420. Quodsi subduplum v.g. Δli S & simile Δlum y petatur; manifestum est Δli S bis hy partes dimidias jungendas esse ad angulos rectos, & super hypotenusa pro basi sumpta

erit addita sumpta Δ simile dato construendum.

Si verò Δ li dati subtripulum. subquadruplum &c. petatur. duæ tertiæ, aut duæ quartæ &c. partes baseos jungantur ad angulos rectos. Deinde ductæ hypotenusæ pars submultiplica normaliter applicanda; donec quadratum hypotenusæ pro basi Δ submultipli ponendæ quadratis partium baseos submultiplis æquale evadat. *Ex. gr.* Pro subtriplo Δ ; si duæ tertiæ partes baseos jungantur ad angulos rectos; ductâ hypotenusâ, erit quadratum ejus duarum tertiarum quadratis æquale [§. 415.]. Deinde si jungatur normaliter una tertia baseos, & hypotenusâ alia ducatur, erit hæc altera hypotenusâ æqualis tribus quadratis partium trium baseos [§. cit.]; consequenter cum quadratum baseos dati Δ esset 9 Quadratorum partium 3um [§. 352.], & Δ li super hypotenusâ pro basi inventa Quadratum esset 3um partium; esset unum ad aliud ut 9 ad 3, seu ut 3 ad 1. Sed quoniam tædiosior est operatio; invenietur id ipsum facilius per §. 404, vel 405.

Tab. X. XI.
f. 126. 129.

& map angenda §. 405. iv. S & simi Δ li S ba se ad an pro basi npta COROLLARIUM V.

421. Similiter figuræ similes à se invicem subtrahentur. *Ex. gr.* Sit subtrahendus. circulus ABCI ex circulo ACFD; jungatur diametro majoris circuli ACFD diameter subtrahendi AC, ducatur deinde CF, super qua assumpta pro diametro si describatur circulus CGFH, erit is differentia circulorum ACFD & ABCI. Nam cum triangulum ACF sit re-

Tab. XI.
Fig. 130.

stangu-

triangulum (§. 298.), erit $AF^2 = AC^2$

CF. Cum igitur circuli sint ut quadrata diametrorum (§. 407.), erit $ACFD = CGFH + ABCI$ (§. 418.); consequenter $ACFD - ABCI = CGFH + ABCI - ABCI$ (§. 80. *Ar.*), hoc est: $ACFD - ABCI = CGFH$.

COROLLARIUM VI.

Tab: XI 422. Si AB fiat æquale BC in semicirculo
Fig: 130. ABC, erunt etiam circuli ATBX, ZBYC æquales (§. 407, 415.); consequenter erit $ATBX + ZBYC = ABCI$ (§. 418.). Igitur circulus ABCI in duos alios ATBX & ZBYC dividitur; si illi super æqualibus subtensis in semicirculo describantur. Ut verò proinde in tres circulos æquales, aut quotcunque dividatur; obtinebitur id per (§. 420, aut per §. 404.).

COROLLARIUM VII.

423. Quodsi AB fuerit $= 1$, & AC $= 2$,
Tab: XI. erit CB $= \sqrt{2}$. Si porro fiat AD $= 1$,
Fig: 131.

$= \sqrt{2}$; erit DB $= \sqrt{3}$. Si fiat AE $= 2$;

erit BE $= \sqrt{5}$. Si fiat AF $= EB =$

$\sqrt{5}$; erit EB $= \sqrt{6}$ (§. 415, & 267. *Ar.*)

& ita porro in infinitum. Omnes adeò
 dices

dices quadratæ surdæ sunt ad unitatē, ut linea recta ad aliam rectam; consequenter numeri (§. 9, 10. *Arithm.*) iique irrationales (§. 38, 268. *Arithm.*).

COROLLARIUM VIII.

424. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. Tab: XI. Fig: 131. 99.); erit ea ad latus AB, ut $\sqrt{2}$ ad 1; sed

$\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 423.), adeoque unitati incommensurabilis (§. 38. *Arith.*), consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

SCHOLIUM.

425. Quadrati latus esse incommensurabile diagonali celebratissimum est apud veteres Philosophos, Aristotelem præsertim & Platonem adeo; ut, qui hoc nesciret, eum Plato non hominem esse, sed pecudem diceret. Inde quoque R. P. TACQUETUS insert: (a) Atque hoc vel unico argumentò, tametsi cætera omnia deficerent, evidentissimè conficitur magnitudines ex definito punctorum numero componi non posse; alias enim nullæ essent incommensurabiles, omnium quippe mensura communis esset punctum.

COROLLARIUM IX.

426. Dantur aded quantitates incommensurabiles
(a.) In Scholie Propositionis 47^{mæ} l. 1.

furabiles; hoc est quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 26. *Ar.*); consequenter rationes irrationales (§. 140. *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæc numeri irrationalibus exprimantur; videlicet BC: AC

$$= \sqrt{2}:1 \text{ (§. 415, \& 267, 126. Arithm.)}$$

Cum verò $\sqrt{2}:1$, consequens sit unitas

erit exponens rationis $\sqrt{2}$ (§. 114, & 116

Ar.); quæ cum sit æqualis ipsi BC (§. 423.) exponens rationis datæ exprimi potest lineæ, quamvis in numeris rationalibus vel irrationalibus exprimi non possit. *Id quod demonstrandum in Arithmetica promissum §. 115. Ar.*

PROBLEMA LXI.

Tab. X. 427. *Datis chorda AB & radio AC, invenire chordam arcus dimidii AD.*
Fig. 127.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bifariam secat in D per *hypoth.* etiam chordam AB bifecat, & ad eam perpendicularis est (§. 272.), adeoque anguli ad Erecti sunt (§. 67.). Quare

I. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE. residuum est quadratum ipsius EC (§. 421.).

II. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 240. *Arith.*), quæ erit EC.

III. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.

IV.

IV. Addantur quadrata AE & DE, summa
est quadratum DA (§. 415.).

V. Inde ergo si extrahatur radix (§. 240.
Arithm.), habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Si radius AC 10000 & AB latus
Hexagoni; erit AB itidem 10000 [§. 237.];

Arithm.; & AE = 5000; quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
$CE = 8669$	$DA = 5176$
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA LXII.

428. Dato latere polygoni regularis in-
scripti AB, invenire latus circumscripti FG.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & DC chor-
dam AB bifariam dividit (§. 336.), erit AE

Tab: XI.

Fig: 132.

$\frac{1}{2} AB$; est verò CE: EA = CD: DG

$\frac{2}{2}$ (§. 230.). Quare si ob angulum rectum ad

E

E (§. 272.) investigetur EC, ut in problemate præcedente, reperietur DG (§. 276. *Ar.*), cujus duplum est latus Polygoni circumscripti FG.

Est enim $CE: CD = EA: DG$, & $CE: CD = EB: DF$ (§. 230.), cum aded sit $EA: DG = EB: DF$ (§. 141. *Arithm.*), & $EA: DG = EB$ per demonstrat: erit etiam $DG = DF$ (§. 152. *Arith.*), adeoque $FG = 2D$ *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit $CD = AB = 10000$; erit $AE = 5000$, & $EC = 8660$ (§. 427.) adeoque $DG = 5773$. Hinc $FG = 11546$

PROBLEMA LXIII.

429. Invenire rationem diametri ad peripheriam.

RESOLUTIO.

I. Quærantur per continuam bisectionem latera Polygonorum inscriptorum (§. 427.) donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.

II. Invento hoc latere quæratum porro latus polygoni similis circumscripti (§. 428.)

III. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimenter polygoni tam inscripti, quam circumscripti (§. 94.).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major, quam ejusdem ad perimetrum Polygoni circumscripti; minor verò quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 414. *Geom.* & 180. *Arithm.*).

Diffe-

Differentiâ verò inter utramque perimetrum cognitâ, facillè definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

S C H O L I O N.

430. ARCHIMEDES primus adinvenit methodum quadrandi circulum per polygona regularia inscripta & circumscripta, & polygonis 26 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter $\frac{1}{10}$ perimeter polygo-

ni inscripti reperietur $3 \frac{1}{7}$; perimeter verò

circumscripti $3 \frac{1}{7}$. Nemo autem plus ope-

ra impendit LUDOLPHO à CEULEN, qui tandem reperit, posita diametro 1, peripheriam esse minorem quam 3. 141592653 589 793238 4626433 83 27. 850. Sed majorem quam idem numerus cyphrâ ultimâ in unitatem mutata. Sed quia numeri tam prolixi parum praxi respondent; in Geometria practica hodie assumitur diametrum esse ad peripheriam ut 100 ad 314, vel in circulis majoribus ut 10000 ad 31415. Hugenius (b) Compendiosorem monstravit viam, sed pluribus Theorematis nixam, quæ in his elementis non demonstrantur.

C O R O L L A R I U M.

431. Si diameter fuerit 113, erit ratio ejus ad

(b) In inventis de Circ: magnit: prop: 12. p. 15. prop: 20. p. 40.

ad peripheriam ut 113 ad 355 quàm proximè,
hoc est ex illa ratione LUDOLPHI 10000:
3145 = 113: 355 (§. 276. Ar.).

Quæ ratio est ADRIANI METII a Paren-
suo inventa ac demonstrata (a), id què satis ac-
curata, id quod conferenti eam cum Ledu-
phina patet (§. 126. Ar.).

PROBLEMA LXI.

432. *Data diametrò circuli invenire peri-
pheriam & aream ejus, & data peripheria
invenire diametrum.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

I. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 430, 431.), una data, invenietur altera (§. 276. Ar.).

II. Peripheria ducta in 4tam diametri partem habetur area circuli (§. 409, 379.).

Ex. gr. *Sit diameter 56; erit*

$$\begin{array}{rcl}
 100: 314 & = & 56: \text{Periph: } 175.84 \\
 & & \text{Diametri } = 56 \\
 \hline
 & & 1884 \\
 & & 1570 \\
 \hline
 & & 703.36 \\
 & & 1758.4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Periph: } 175.84 & \text{Area} = & 24.61.76 \\
 & & \text{CO}
 \end{array}$$

(a) In libello adversus quadraturam circuli
Simonis AQUERCU conscripto.

COROLLARIUM I.

433. Si diameter 100, peripheria verò sit
 [S. 430.]; erit area circuli 7850 [S. 432.].
 Est verò quadratum diametri 10000 [S. 352.].
 Ergo quadratum diametri ad aream circuli ut
 10000 ad 7850 [S. 106. Ar.]; seu ut 1000 ad
 785 [S. 155. Ar.] quàm proximè.

COROLLARIUM II.

434. Similiter si diameter 113, peripheria

355 [S. 431.]; erit area circuli 10028 $\frac{3}{4}$

[S. 432.]; est verò quadratum diametri 12769
 [S. 352.]; ergo hoc ad illam ut 12769 ad

10028 $\frac{3}{4}$ [S. 106. Ar.], seu per 4 multipli-

cando utrumquè [S. 153. Ar.] ut 51076 ad

40115; consequenter [dividendo per 113.]; ut

452 ad 355 [S. 156. Ar.].

Quæ Metiana proportio priori accuratior.

COROLLARIUM III.

435. Area igitur circuli invenitur etiam; si

ad 1000, 785 & quadratum diametri; aut si

ad 452, 355, & quadratum diametri numerus

quartus proportionalis quærat [S. 276. Ar.].

Ex. gr. Sit diameter 56; erit quadratum

3136 [S. 352, 357.]. Quare [S. 433.]

N 1000

$$1000 : 3136 = 785 : 24, 61, 76$$

COROLLARIUM IV.

Tab. XI.
Fig. 133.

436. Si area circuli minoris GEHF trahatur ex area majoris concentrici ADB relinquitur annulus ADBCGEHF.

PROBLEMA LXIII.

437. *Data area circuli invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

I. Quærat^{ur} ad 785, 1000, & aream circuli datam 24, 61, 76 numerus quartus

proportionalis 3136 (§. 276. *Ar.*); qui est quadratum diametri (§. 433.).

II. Inde extrahatur radix quadrata 56 (§. 240. *Ar.*); quæ est diameter quæsitæ.

COROLLARIUM.

438. Hinc datâ areâ omnes figuræ regulares scilicet & irregulares in circulum commutari possunt. Inventa enim diametro circulus describi potest (§. 116, 31.).

PROBLEMA LXIV.

Tab. X.
Fig. 127.

439. *Dato radio circuli AC una cum*

tionem arcus AB ad peripheriam, invenit e aream sectoris ACB .

RESOLUTIO

IV.

GEHF
ici ADB

I. Inveniat peripheria inferendo 100:
 $314 = AC$ ad semiperipheriam (§. 276. *Ar.*)
 & 432 *Geom.*).

XIII.

ire diam

II. Quærat per porro ad 180° , arcum datum
 ABC in gradibus, & semiperipheriam inven-
 tam numerus quartus proportionalis (§. 276.
Ar.), ut habeatur peripheria arcus AB in ea-
 dem mensura, in qua radius AC datur.

aream

III. Tandem peripheria arcus AB ducatur
 in semiradium, aut totus radius ducatur in se-
 miperipheriam.

quartus p

Factum exprimet aream sectoris (§. 412,
 379.).

qui est q

Ex. gr. Sit radius $AC = 6$

Arcus $AB = 60^\circ$

ata 56

fita.

N.

gura re

culum co

ametro

XIV.

ad cum

tione

$$I. 100 : 314 = 600 [\S 284 \text{ Ar.}]$$

$$\text{semiperiph:} = 1884 [\S 375 \text{ Ar.}]$$

$$II. (180 : 1884 = 60$$

$$(3 : 1884 = 1 : 628$$

$$III. 628 = \text{Periph: Arc: } AB$$

$$300 = AC$$

N2

Area

$$\text{Area} = 18,84.$$

COROLLARIUM I.

Tab: X.

Fig: 127.

440. Quodsi $\triangle ACB$ subtrahatur ex area sectoris CBDA, residuum erit area segmenti

BDAE. Ex. gr. Sit area sectoris =

84, & area trianguli = 15,18; erit segmentum

ADBE = 3,66. Si verò BCA datur sectori BFACB prodibit segmentum majus.

Itaque si detur altitudo segmenti DE, dimidia basis EA, quæraturne area segmenti

1^{mo}. Si protendatur EA in B, ut sit hypoth: EA = BE, habentur tria puncta D, A; itaque describitur peripheria circuli per §. 276. & in eo basis segmenti applicetur AB.

2^{do}. Quæritur diameter per §. 309, sagitta in directum protenditur.

3^{io}. Denique ductis radiis ex centro & CA area sectoris inquiritur per §. 43 atque $\triangle ACB$ ab area ejusdem subtrahitur.

Vel 1^{mo} diameter quæritur per §. 309, reliqua omnia eodem modo fiunt.

COROLLARIUM II.

Tab: XI.

Fig: 134.

441. Similiter area Zonæ ADCB invenitur, si area segmentorum AEB, & DFC area circuli ADFCBE subtrahantur.

SCHO.

S C H O L I O N.

I. 442. Ne pro inveniendâ area sectoris atq;
segmenti peripheriam investigari opus sit, ar-
cum gradus atque scrupula tam prima, quàm
secunda istiusmodi particulis expressa, quali-
tatem diametris est 100000, in Tabula subsequen-
te exhibere placet.

Constructio Tabulæ intelligitur ex re'soluti-
one Problematis LXLV. Usus talis est. Sit
ex. gr. ut in casu problematis citati Diame-
ter 1200, & arcus 60. Cum 60 gradibus re-
spondeant in Tabula 52359 particulæ dia-
metri; inferatur.

100000: 52359 = 1200

10471800
52359

Peripher: 62830800

Est ergo arcus 628, ut supra §. 439 eun-
dem invenimus.

II.

CB inven
z DFC
r.
SCHO

N3

Tabula

Tabula pro convertendis gradibus
Arcuum in partes Diametri

Gradus	Part:Per:p:	Min:	Part:Per:
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17452	20	290
30	26179	30	436
40	34904	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Secu:	Part:Per:
70	61086	2	0
80	69813	3	1
90	78539	4	2
100	87266	5	1
110	95993	6	1

Grad.

120

130

140

150

160

170

180

190

360

443.

EF. D
erit AD

Quor

quadrat

(S. 497

commu

81. Ari

quadrat

titur, si

quadrat

Quar

352.

	Grad:	Part:Periph:	Minut:	Part:Per:
0				1
1	120	104719	7	1— 2
2				1
3	130	113446	8	1— 2
4				2
5	140	122173	9	2
6				2
7	150	130899	10	2
8				4
9	160	139626	20	7
10				9
11	170	148353	30	12
12				
13	180	157079	40	
14				
15	190	165680	50	
16				
17	360	314159		

DEFINITIO LXXX.

443. Sit ADBC semicirculus, & AC = Tab: XI.
 CF. Describitur radiò FA quadrans AEBF, Fig: 135.
 erit ADBE Lunula Hippocratis.

COROLLARIUM.

Quoniam AF = ² AC (\S . 415.), erit
 quadrans AFBE semicirculo ACBD æqualis
 (\S . 407.); ablatò igitur utrinque segmentò
 communi AEBC, erit ADBE = \triangle AFB (\S .
 86. *Arithm.*) = ² CB (\S . 384/380.). In
 quadratum itaque lunula Hippocratis conver-
 titur, si super radio semicirculi, in quo existit,
 quadratum FB construitur (\S . 322.).
 Quare etiam area illius innotescit per \S .
 352.

SCHOLION.

444. Non ista solum HIPPOCRATI CHIO insigni Geometriae laus inventionis debetur, sed etiam prater adinventam duplicationem cubi per duas medias proportionales (§. 315.), & alia bene multa, quod teste PROCLUS Elementa Mathematicum primus conscripserit, ab aliis inventa in ordinem digesserit. Vixit adhuc ante Aristotelem.

Partis ergo circuli quadratura exacta habetur; etsi integrum nullus adhuc quadratum potuerit (§. 413.). Falluntur itaque qui quadraturam circuli perfectam dari negant. Manifestum enim est utrumque in nulle semicirculi scilicet & quadrantis arcum in rectam abire; etsi nos lateat, qua ratione radii ad peripheriam. Non itaque a sola ratione vera peripheriae ad diametrum quadratura circuli dependet, etsi optimo omnium hoc modo inveniretur.

Videatur hac de re Clarissimus Geometra P. TACQUET Geometr: Pract: l. 2. p. 84. & sequent: in Schol: ubi quadraturam circuli omnino possibilem adstruit ita, ut secus sentientes parum Geometria peritos esse existimet.

PROBLEMA LXV.

Tab. XI.

Fig: 136.

445. Parallelogrammum ABEC ex dato puncto D in duas partes aequales dividere.

RESOLUTIO.

Fiat EF = AD. & ducatur recta DF.

Erit ADFC = DBEF. DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE, erit $o = x$ (§. 140.), & ob parallelas AB & EC (§. 89.), $= u$ (§. 202.); sed $AD = FE$ per constr. Ergo $\triangle ADG = \triangle FGC$ (§. 159.). Est verò $\triangle ACE = \triangle ACB$ (§. 320.). Quare $ACFG = DBEG$ (§. 81. Arithm.); consequenter $ADFC = DBEF$ (§. 78. Ar.). Q. e. d.

PROBLEMA LXVI.

446. Parallelogrammum atque triangulum in partes quotcunque æquales dividere. Tab: XI. Fig: 137. 138.

RESOLUTIO.

- I. Dividatur basis CD in tot partes æquales, in quot figura dividenda (§. 231.).
- II. In parallelogrammo ducantur rectæ II. 22. In triangulo A1. A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2 BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 89.); eandem altitudinem habent (§. 196, 197.); sunt itaque in basium ratione (§. 376.); consequenter ob $C1 = 12 = 2D$ per constr: etiam parallelogramma æqualia (§. 126. Ar.). Q. e. unum.

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis non nisi unica duci possit (§. 188.); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem habent (§. 197.); adeoque sunt in

in ratione basium (§. 376.); sed bases sunt
 æquales, ergo & triangula (§. 126. *Arith.*)
Q. erat alterum.

PROBLEMA LXVII.

Tab: XI.

Fig: 139.

447. Dividere triangulum ABC in partes
 3 ex dato puncto D .

RESOLUTIO.

I. Dividatur \triangle in 3 partes ex angulo op-
 posito C ; scilicet in ACM , CMN & CNB (§.
 446.).

II. Ex puncto dato D duc ad verticem
 neam DC , atque ex punctis divisionum M &
 N parallelas MR & NS ipsi DC describe.

III. Ducantur rectæ RD & SD .

Erant ARD , $RDSC$ & DSB partes 3 \triangle
 ABC æquales.

DEMONSTRATIO.

Nam $\triangle CNS = DSN$; (§. 372.). Ergo
 addendo utrique BSN , erit $CNB = DBS$ (§.

78. *Arithm.*): Sed $CNB = \frac{1}{3} ACB$ p
 3

§. 446. Ergo etiam $DSB = \frac{1}{3} ACB$ (§.
 3

77. *Arithm.*). Eodem modò ostenditur de
 1

$\triangle ARD$. Unde & reliquum $RCSD = \frac{1}{3} \triangle$
 3

ACB . *Q. e. d.* PRO-

PROBLEMA LXVIII.

448. Dividere $\triangle DEF$ in partes quotcun-
que æquales per lineas parallelas. T. b. X. l.
Fig. 144.

RESOLUTIO.

I. Dividatur latus aliquod \triangle li eg. EF in
partes petitas ex. gr. in 4 in punctis g, o, z,
(§. 231.).

II. Inter Eg & EF, item inter Eo & EF,
atque inter Ez & EF inveniantur mediæ pro-
portionales (§. 308.). & basi parallelæ ap-
plicantur in HI, KL & MN (§. 219.).

$$\text{Erit } \triangle EHI \equiv HILK \equiv KLMN \equiv M$$

$$NDF \equiv \frac{1}{4} \triangle DEF.$$

DEMONSTRATIO.

Eadem, quæ data est §. 404. Unde cum

$$\triangle EHI \equiv \frac{1}{4} DEF, \text{ \& } \triangle EKL \equiv \frac{1}{4} \triangle D$$

$$EF, \text{ erit } \triangle EKL - \triangle EHI \equiv HIKL \equiv$$

$$\frac{1}{4} \triangle EDF (\S. 208. \textit{Arithm.}). \text{ \& ita porro.}$$

$$\frac{4}{4} Q. e. d.$$

COROLLARIUM I.

449. Si in triangulo EFD ponatur radius
circuli FE pro altitudine, & periphæria FCIR
pro basi §. 432.); erit $\triangle HEI \equiv$ circulo a,
& $\triangle EKL \equiv$ circulo a + b, qui est annulus.
Item

Tab. XII.

Fig. 144.

143.

Item $\triangle ENM \equiv$ circulo $a + b + d$. Denique $\triangle EDF \equiv$ circulo $a + b + d + c$, hoc est circulo FCIR (§. 409. *Geom.*: & 85. *Arithm.*:).

Igitur FCIR — $a \equiv$ EFD — EHI, hoc est FD est: $c + d + b \equiv$ FDHI (§. 81. *Arithm.*:).

Sed trapezium FDHI $\equiv \frac{3}{4} \triangle EFD$. Ergo

etiam $c + d + b \equiv \frac{3}{4}$ circuli FCIR (§.

Arithm.: & 154. *Geom.*:). Similiter quoniam $\triangle EKL \equiv$ circulo $a + b$, & circulo $a \equiv \triangle EIH$ (§. 409.); erit $\triangle EKL - EIH \equiv a + b - a$ (§. 81. *Arithm.*:), hoc est: KH æquale annulo b; sed trapezium LIKE

$\equiv \frac{1}{4} \triangle EFD$ (§. 448.), ergo etiam annulus

bestæqualis — circuli CIRE, & ita porro.

Patet adeò circulum in partes annulares eodem modo dividi, quò \triangle per lineas parallelas §. citt.); si scilicet inter radius EF, & partes desideratas quærat media proportionalis, atque eà circuli concentrici describantur.

COROLLARIUM II.

Tab: XII.

Fig: 44.

143

450. Facilius ergò & area annulorum invenitur, quàm §. 436, & ipsi in circulum aut quadratum &c. commutantur. Etenim si circulus CIRE æqualis \triangle rectangulo EFD (§. 409, & 432.), atque in altitudinem EF

D. Denique æqualem radio dati circuli transferantur
 hoc est annulorum distantia EI, IL, LN, ducanturque
Arithm. per puncta divisionum NM, LK, IH parallelæ
 EHI, hoc est basi FD, cum sint annuli b, d, c æquales tra-
Arithm. peziis D, M, K (§. 449.), inveniatur area
 eorum per §. 385. Commutabuntur verò in
 D. Ergo circulum per §. 438, in triangulum aut qua-
 dratum per §. 387.

PROBLEMA LXVIII.

451. *Dividere trapezium parallelarum ba-* Tab: XI.
sum in partes quocunque eg. 3. Fig: 140.

RESOLUTIO.

I. Dividantur latera parallelæ AC & EH
 in partes 3.

II. Ducantur per intersectiones partium
 rectæ BE, & DG.

Erit $ABEF = BDGF = DGHC$.

DEMONSTRATIO.

$\triangle ABE = \triangle BDF$, & $\triangle BEF = \triangle DFG$
 (§. 372.); igitur $ABE + BEF = BDF +$
 DGF (§. 78. *Arithm.*), hoc est; $ABEF =$
 $BDGF$ (§. 85. *Arithm.*).

Eodem modo ostenditur esse $BDGF =$
 $DCHG$. Q. e. d.

SCHOLION I.

452. *Siquidem trapezia per lineas basibus*
parallelas non redduntur similia; divisa non
possunt in partes datae rationis per lineas pa-
ralle-

parallelas eò modò, quo triangula per §. 448.
Quod autem similia non sint, demonstratio
apagogica evincimus.

Tab: XII. Sit enim DBti \propto brti; erit BD: ti =
Fig: 145. br (§. 153.); cùm ponatur etiam brsh \propto h
BD, erit etiam BD: hs = hs: br (§. citat.)

consequenter BD. br = ti, & BD. br =

hs (§. 269. Arith.); ac proinde ti = hs
(§. 77. Arithm.); Quod cum sit absurdum

nam ti > hs (§. 91. Geom: & 218. Arithm.)
patet Q. e. d.

SCHOLION II.

453. TACQUETUS * tradit modum
dividendi trapezii per parallelam in quinque
tantum partes, sed viâ satis operosâ. Docet
verò Antecessor meus R. P. THOMAS Z
BROWSKI S. J. ** exdividere trapezium
per parallelas in quot libuerit partes data
rationis, etsi demonstrationem non compleverit.
Quod insigne, quantum quidem mihi constat
VIRI CLARISSIMI inventum absoluta
demonstratione ita pono.

PROBLEMA LXX.

Tab: XII. 454. Dividere trapezium brBD in quinque
Fig: 145. partes data rationis per lineas
bus parallelas. RESOLUTIO.

* Geom: Pract: l. 2. p. 165. cap. 16. Problem.

** In specimine Mathem: ex Arithm: Geom:
Trigon: & Algebra Annò 1753.

RESOLUTIO.

S. 448
nfrain

ti =

sh =

S. citat

CD. br =

=

hs

absurdum

S. Arith

modum

r in de

S. Doct

MIAS Z

trapezia

s data

implever

z confa

oluta de

X.

D in qua

neas b

RESO-

s. Probl

thm: Ge

I. Protendantur in directum latera trapezii Br & Db, donec se interfecent in C.

Tab XII.

Fig: 145.

II. Quærat^{ur} ad totam CD & ejus segmen-
tum bC tertia proportionalis Ce, scilicet CD:
bC = bC: Ce (§. 226.).

III. Dividatur eD in partes desideratas e.
g. tres in f & g (§. 231, 232.).

IV. Quærantur inter CD & Cf, item inter
CD & Cg mediæ proportionales Ch, & Ci,
hoc est: ut sit CD: Ch = Ch: Cf, & CD:
Ci = Ci: Cg (§. 308.).

V. Intervallò inventæ Ch, item Ci, ex tri-
anguli vertice C interfecetur latus CD in h
& i; perque puncta ista sectionis ducantur i-
sti BD parallelæ hs & it.

Disco fore Trapezium brBD ad trapezium
brsh ut 3 ad 1.

DEMONSTRATIO.

Quoniam per hypotesim (§. 32. Methodi
Mathem.) sive mavis per constr: CD: bC =

bC: Ce, & CD: Ch = Ch: Cf; erit Cb

= CD. Ce, & Ch = CD. Cf (§. 270, 60

Arithm.). Porro $\triangle BCD: \triangle Cbr = DC$

Cb, & $\triangle Chs: \triangle Cbr = Ch: Cb$ (§. 400.

Geom: 225. Arithm.); igitur $\triangle BCD: \triangle$

$Cbr = DC: DC. Ce$, & $\triangle Chs: \triangle Cbr$

$\text{DC} : \text{Cf} : \text{DC} : \text{Ce}$ (§. 142. *Arithmet.*)
 consequenter $\triangle \text{BCD} : \triangle \text{Cbr} = \text{DC} : \text{Ce}$
 & $\triangle \text{Chs} : \triangle \text{Cbr} = \text{Cf} : \text{Ce}$, (§. 157. *Ar.*)
 atque hinc $\triangle \text{BCD} = \triangle \text{Cbr} : \triangle \text{Cbr} = \text{DC} : \text{Ce}$
 $\text{DC} = \text{Ce} : \text{Ce}$, & $\triangle \text{Chs} = \triangle \text{Cbr} : \triangle \text{Cbr} = \text{Cf} : \text{Ce}$
 $\text{Cf} = \text{Ce} : \text{Ce}$, hoc est: $\text{brBD} : \triangle \text{Cbr} = \text{De} : \text{Ce}$, & $\text{brsh} : \triangle \text{Cbr} = \text{ef} : \text{Ce}$ (§. 169. *Arith.*); itaque $\text{brBD} : \text{brsh} = \text{De} : \text{ef}$ (§. 170. *Arith.*); sed $\text{De} : \text{ef} = 3 : 1$ per constructionem
 ergo etiam $\text{brBD} : \text{brsh} = 3 : 1$ (§. 126. *Arithm.*). Q. e. d.

COROLLARIUM.

455. Quoniam per demonstrata §. 441. Annulus bD est æqualis trapezio brBD; si modo inveniatur per §. 276. segmentum dii bc, 2^{do} reliqua tria juxta resolutiones Problematis fiant; tandemque 3^{to} intervalla Ch, item Ci ex centro C describantur circuli, divideretur etiam annulus bD in 3 partes x, & z.

PROBLEMA LXXI.

456. Dividere trapezoidem ADCE in partes quotcunque eg. 3.

Tab: XI
 Fig. 141.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur BC basi AE parallela, tandemque trapezium ABCE dividatur ut in problemate præcedenti. Erit $\text{ABD}_1\text{G} = \text{ADCE}$

$\text{D}_1\text{G}_2 = \text{D}_2\text{FEC}$ (§. 451, 446.). Q. e. d.

PRO-

PROBLEMA LXXI.

ithmeti.)

DC: Ce

157. Ar.

Cbr =

or: Δ C

X Cbr =

e (\$. 106)

e: ef

per conf

S. 126. A

r.

S. 44

BD; in

entum

olutiones

interval

ur circ

artes x,

KI.

DCE

TRO.

andemo

problem

DCE=

). Q. e

PRU-

457. Figuram rectilineam quamcunque A Tab: XI.
BCDE in partes æquales dividere. Fig: 141.

RESOLUTIO.

I. Quæretur area figuræ (\$. 385.), atque
idem triangulum vel rectangulum æquale
constituatur (\$. 388.).

II. Triangulum hoc vel rectangulum in
partes petitas divide (\$. 446.), & denique

III. Triangula vel rectangula singula, pro-
ut vel spatium tulerit, vel in alia sibi æqualia
commutata per S. 371 in data figuræ area con-
vertitur.

Vel potius.

I. Quæretur area figuræ, & dividatur in
partes æquales, in quot figura dividi de-
bet eg. in 3.

II. Area partis in nostro casu 3tiæ ulterius
dividatur bifariam.

III. Area Δ AED subtrahatur à parte 3tia,
residuum dividatur per $\frac{1}{2}$ AD, erit quotus

IV. altitudo Δ li AID priori AED addendi, ut
AEDI sit pars 3tia figuræ (\$. 383.).

IV. Quare intervallò hujus altitudinis du-
catur PI parallela ipsi DA, ut habeatur in la-
tere figuræ punctum I; ex quo si ducatur re-
cta DI, erit AEDI pars 3tia figuræ.

V. Pars 3tia dimidia, sive sexta totius fi-
guræ dividatur per $\frac{1}{2}$ DI, quotus erit NK

altitu-

Tab: XI.
Fig: 141.

altitudo Δ li DKI sextam figuræ partem constituentis.

VI. Intervallò igitur hujus altitudinis agitur ipsi ID parallela (§. 219.), ut habeatur punctum K (§. 372.).

VII. Dividatur etiam dimidia pars 3tiæ figuræ per $\frac{1}{2}$ DK, ut habeatur Lo altitudinis $\frac{2}{2}$

Δ KLD sextam itidem partem figuræ constituentis.

VIII. Quare hujus intervallò denuò ducitur ipsi KD parallela, ut punctum L determinetur, ducaturque recta KL, quæ partem figuræ 3tiæ KIDL refecabit.

IX. Si figura plures, quàm tres in partem resolvenda, eodèmodò ulterius procedendum.

COROLLARIUM.

458. Quodsi ex area 5773,38 refecatur

sint 962,23. Imò dividatur prior area in posteriorem, ut innotescat, quòtā sit pars totius, ex qua auferri debet. Deinde res omnia fiant, ut in problemate præcedente.

Ita in exemplo 5773,38 divisum per

23 quotum dat 6, sexta igitur est pars 962,23 (§. 61. Ar.), quæ ex area debet refecari. 6 itaque partes area dispescenda, & una eam refecanda.

SCHOLIUM I.

459

459. Si AED majus tertia eg. parte, ipsam partem 3tiam à Δ lo subtrahi necesse est, & residuum, si dividatur per — DA , erit quotus altitudo trianguli ab ipso Δ lo DEA auferenti. Saepe etiam consultum est, ut ima pars $AEDI$ per duo triangula, uti & cetera, determinetur.

PHOLI ON II.

460. Ubi in charta divisio absoluta, in campo puncta EKL per quantitatem rectarum AI, IK , & DL facile determinantur (§. 153.).

CAPUT VII.

DE SECTIONE ET SITU PLANORUM.

DEFINITIO LXXXI.

461. Planum EUCLIDI ad planum rectum seu perpendiculare est, cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum $ABCD$ & EF GH sectioni HG perpendiculares ducuntur in plano $EFGH$, rectæ sive perpendiculares sint alteri plano $ABDC$.

Tab: XIII.

Fig: 147.

O₂

COROL-

COROLLARIUM I.

- Tab: XIII. 462. Si loco sectionis ducatur in plano recta
Fig: 148. EF ; rectæ omnes GE , HF ad rectam EF
in plano $GEFH$ perpendiculares sunt etiam ad
planum $ABDC$ perpendiculares (§. 30.).

COROLLARIUM II.

- Tab: XIII. 463. Cum in plano $ABCD$ à quolibet pun-
Fig: 149. cto A vel a ad quodlibet punctum C vel b
duci possit linea recta (§. 30.), si recta FE
fuerit perpendicularis ad duas rectas AC &
ab in plano $ABCD$ ductas, & se mutuo in
puncto E secantes; erit ea perpendicularis ad
rectam quamvis aliam BD , quæ per punctum
 E ducitur in eodem plano (§. 462.). Con-
sequenter recta EF ad duas rectas AC & ab
in plano $ABCD$ perpendicularis, omnibus re-
ctis per punctum E in eodem plano ductis ad
angulos rectos insitit (§. 67.).

SCHOLIUM.

464. Hinc linea recta EF ad planum $ABCD$
perpendicularis definitur, quæ cum rectis
omnibus lineis in plano ductis, à quibus
tangitur, angulos rectos facit.

DEFINITIO LXXXII.

- Tab: XIII. 465. Inclinatio plani $KEGL$ ad planum
Fig: 150. BCD est angulus HFI , quem efficiunt rectæ
 HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG
perpendiculares.

THEOREMA LXV.

- Tab: XIII. 466. Recta linea pars quadam AB
Fig: 151. potest esse in subiecto plano DE , & pars qua-
dam BC in sublimi.

DEMONSTRATIO.

Sitenim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars verò altera BC in sublimi. Cum linea recta utrinque produci possit (§. 16.), producatür AB in F; erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ A BC per hypoth.; punctum igitur rectam describens, mutat directionem in B, progrediendo scilicet tam versùs F, quam versùs C; quod cum sit absurdum (§. 13.), rectæ lineæ pars quædam AB non potest esse in subiecto plano DE, & pars quædam BC in sublimi. Q. e. d.

COROLLARIUM I.

467. Dux igitur rectæ ADEB & CDF segmentum commune DE habere non possunt (§. 466.); consequenter dux rectæ AB & C se mutuo non intersecant, nisi in uno puncto D. Tab: XIII. Fig: 152.

COROLLARIUM II.

468. Si trianguli ABC una pars ADE esset in subiecto plano, & altera pars BDEC in sublimi, esset etiam pars rectæ AD in subiecto plano, & altera pars BD in sublimi (§. 74.); sed hoc est absurdum (§. 466.); totum itaq; triangulum ABC erit in eodem plano. Tab: XIII. Fig: 153.

COROLLARIUM III.

469. Siquidem rectarum BE & DC se mutuo secantium in A partes AB & AC sunt crura trianguli ABC, erunt eadem in eodem plano (§. 468.); sed in eodem plano est EA, in quo est AB, & AD in eodem plano, in quo est AC (§. 465.); ergo lineæ EB & DC se mutuo secare non possunt, nisi in eodem plano sint. Tab: XIII. Fig: 154.

THEOREMA LXVI.

470. Si duo plana $ABCD$ & $EFHG$ mutuò secant; erit communis sectio recta IK .

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII. Quoniam rectæ AB & EF se mutuò non
Fig: 155. intersecant, nisi in puncto L , nec rectæ DC &
 GH , nisi in puncto K (§. 456.), si communis planorum sectio non est recta unica, sed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducatur ergo in plano $EFHG$ recta ILK , & in plano $ABCD$ recta IMK quod fieri posse patet, si sectio communis planorum $ABCD$ & $EFHG$ non est recta unica IK , ut ut planum sectionis lineis curvis in punctis I & K coeuntibus terminari sumas (§. 170.). Duæ igitur rectæ ILK & IMK earum extrema in I & K coincidunt, totæ in punctis omnibus coincidere debent. (§. 150.); consequenter communis sectio esse non potest, nisi recta jungens puncta I & K . Q. e. d.

THEOREMA LXVII.

471. Si duæ rectæ AB & CD fuerint in eodem plano; recta EF eas secans in G & H erit in eodem plano.

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII. Secet planum aliud planum datum, in quo pos-
Fig: 156. sunt rectæ AB & CD , in punctis G & H recta transtiens per G & H est communis sectio planorum (§. 469.), sed eadem est pars lineæ EF (§. 150.) quæ duas AB & CD secat per hypot. Recta igitur secans EF est in eodem plano, in quo continentur duæ AB & CD . Q. e. d.

THEOREMA LXVIII.

472. Si recta IE fuerit ad planum ABC perpendicularis. & ex E tanquam centro in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ IG, IF &c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.

Tab: XIII.
Fig: 157.

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG &c. erit EF = EG (§. 32.); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 464.), erit etiam ang: FEI = ang: GEI (§. 127.); consequenter cum sit EI = EI, erit FI = GI (§. 159.). Q. e. d.

THEOREMA LXIX.

473. Ex eodem puncto E ad planum ABC non nisi unica perpendicularis EF erigi potest.

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, erigatur adhuc altera perpendicularis EG, erit ergo tam EF, quam EG perpendicularis ipsi rectæ ab (§. 464.), sed hoc est absurdum (§. 183.); ex eodem igitur puncto E non nisi unica perpendicularis EF erigi potest. Q. e. d.

Tab: XIII.
Fig: 149.

THEOREMA LXX.

474. Ab eodem puncto I in sublimi dato ad eodem planum ABCD perpendicularis non nisi unica IE demitti potest.

Tab: XIII.
Fig: 157.

DEMONSTRATIO.

O₄ Demit-

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia perpendicularis IG. Jungantur E & G in plano recta EG: erit IEG triangulum in eodem plano (§. 458.). Duo igitur in triangulo ad basim anguli E & G recti sunt (§. 464.) sed hoc est absurdum (§. 189.), à puncto itaque I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

Tab. XIII. 475. *Linea perpendicularis IE est brevior, quam quæ à puncto extra planum dato ad idem duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG, & puncta E & G jungantur recta EG: erit triangulum IEG in eodem plano (§. 468.). Tum siquidem angulis ad E rectus (§. 464.), enim $IE < IG$ (§. 191.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXII.

Tab. XIII. 476. *Si recta LE tribus rectis EF, HE, IE, vel etiam pluribus in eodem puncto concurrentibus perpendiculariter insistat: runt tres illæ rectæ FE, HE & IE, vel etiam plures in eodem plano ABCD.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri potest, recta EF in plano LEGK, quod secat planum ABCD, in quo sunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 470.). Quoniam LE perpendiculariter insistit duabus rectis EH & EI in plano ABCD per hypothese-
eadem

eadem quoque ad angulos rectos infistit rectæ EG (§. 463.). Sed cum LE etiam perpendicularis sit ad EF *per hypoth.* erit etiam LEF rectus (§. 67.); consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 127.), pars nempe toti (§. 8. *Arit.*). Quod cum sit absurdum, rectæ FE, HE & IE, quibus LE perpendiculariter infistit, in eodem sunt plano ABCD. *Q. e. un.*

Quod si lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter infistit, siquidem tertia cum prima & secunda in eodem sunt plano *per demonstrata*, erit etiam quarta cum secunda & tertia in eodem plano; & ita porro: *Q. e. alterum.*

THEOREMA LXXIII.

477. *Lineæ rectæ FE & GH eidem plano ABCD perpendiculares sunt inter se parallelæ, & si una parallelarum FE vel GH fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem planum perpendicularis erit altera.* Tab: XIII. Fig: 149.

DEMONSTRATIO.

Ducatur in plano à puncto E ad punctum H recta EH. Cum igitur utraq. FE & GH sit perpendicularis plano ABCD, utraq. etiam perpendicularis erit rectæ EH, (§. 30.); ac proinde anguli GHE, & FGH recti (§. 67.); adeoque æquales (§. 127.). Consequenter GH parallela ipsi FE (§. 203.). *Q. e. unum.*

Similiter si ducatur in plano ABCD recta EH, quoniam *per hypothesim* FE & GH sunt parallelæ; erunt anguli ad E & H æquales (§. 202.); consequenter cum rectus sit *per hypoth.* ad E (§. 67.), rectus etiam erit ad H, vel

vel è contra (§. 127.); ac proinde si una parallelarum FE est perpendicularis ad planum ABCD, erit etiam altera (§. 67.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXIV.

Tab: XIII. 478. Si due rectæ AC & CB fuerint parallela duabus rectis DF & EF, etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.

Fig: 159

DEMONSTRATIO.

Fiat CB = FE & CA = FD; quoniam CB parallela ipsi EF, & CA parallela ipsi FD per hypoth: erit BE ipsi CF, & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 218.); consequenter BE parallela (§. 158.) & æqualis (§. 158. Arithm.) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 218.). Est itaque angulus DFE = ACB (§. 159.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXV.

Tab: XIII. 479. Si recta IK duobus planis ABCD & EFGH fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.

Fig: 160.

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ planum FGHE in M occurrit, & cum LM ad planum EG recta sit per hypoth: ad IK parallela est (§. 477.). Quare si puncta M & K jungantur recta MK, erit tam angulus K, quam I rectus (§. 464.), consequenter LM = IK (§. 205.). Cum eodem modo demonstretur rectam ad quovis alio puncto plani ABCD ductam in IK

IK parallelam eidem æqualem esse; plana AB
CD & EFGH ubivis à se invicem eodem in-
tervallo distare (§. 475, 12.) patet. Sunt igitur inter se parallela. Q. e. d.

S C H O L I O N.

480. Nimirum planum $ABCD$ alteri EF
 GH dicitur parallelum ita, sicuti recta alteri
recta parallela est, si ubivis eandem inter se
distantiam servant (§. 70.).

T H E O R E M A LXXVI.

481. Si planum $ADCB$ secet duo plana pa- Tab. XIII.
rallela $EFGH$ & $IKLM$; erunt sectiones A Fig. 161.
 D & BC inter se parallelae.

D E M O N S T R A T I O.

Ponamus enim sectiones AB & BC non es-
se inter se parallelas; ergo continuatæ alicu-
bi concurrent. Cum igitur si plana cum istis
sectionibus continuentur, totæ in ipsdẽ sint
(§. 466.), ipsa quoque plana $EFGH$ & $IKLM$
concurrent. Parallela itaque non sunt (§.
481.); quod cum sit absurdum, sectiones AD
& BC planorum parallelorum $EFGH$, & IK
 LM parallelæ sunt. Q. e. d.

T H E O R E M A LXXVII.

482. Si dua rectæ lineæ se mutuò tangen-
tes AC & AB duabus aliis se mutuò tangen-
tibus EG & EF fuerint parallela; etiam plu-
ra $ACDB$ & $EGLH$ per ipsas ducta erunt
parallela.

D E M O N S T R A T I O.

Conci-

Tab: XIII. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallele (§. 219.), erunt eadem/HK, HI parallelæ rectis AB & AC (§. 158.), & AH tum ad HK tum ad HI perpendicularis (§. 464.). Consequentèr AH erit etiam perpendicularis ad AB & AC (§. 200.), atque ideo perpendicularis quoque ad planum ABC (§. 463, 464.), erit igitur planum ABC parallelum plano EFLG (§. 479.). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVIII.

Tab: XIII. 483. *Due lineæ rectæ NR & CS à planis parallelis ABDC, EFHG, & IKLM portionaliter secantur, ut nempe sit PR: PT = TS: TQ.*

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erunt $\triangle \triangle$ NOR, ORS in eodem plano (§. 468.). Siquidem verò PQ parallela ipsi NO, & QT parallela ipsi RS (§. 481.) erit RQ: QO = RP: PN, & RQ: QO = TS: TO (§. 221.); consequenter RP: PN = TS: TO (§. 141. Ar.). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXXII.

Tab: XIII. 484. *Ad datum planum ABDC in dato puncto E erigere perpendicularem EI.*

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI eo modo, ut punctum I quodlibet in circulo EG sit ad rectam EI perpendicularis (§. 488.).

Si recta, & quodcunque I à peripheriæ punctis quibus-
atque F & G æqualiter distet, quod mecha-
m/HK, Hic fit per fila æqualia ex dictis punctis ex-
, & A ussa; erit ea ad planum ABCD in dato pun-
ctio E perpendicularis (§. 472.).

COROLLARIUM I.

485. Cum $\triangle IEG$, & quodcunque aliud e-
um ABC, eodem modo determinatum eg. $\triangle EIF$, sit re-
Q. e. d. ctangulum; evidens est, si crus, unum normæ
ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex angu-
VIII. li recti, quem crura comprehendunt, sit in
S à plan centro E, erit crus alterum ad planum ABCD
I. M. in dato puncto E perpendiculare. Insignis
PR: P. itaque est usus normæ in erigendis perpendi-
cularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLIUM.

O. 486. Normæ crura aliquam latitudinem
& O, ita habere debent, ne ad rectam EG applicata
atque re- ularum fallant iudicium.

COROLLARIUM II.

(§. 481) 487. Quodsi ex puncto I extra planum da-
: QO = demittenda sit perpendicularis; norma su-
RP: P. per plano erecta huc illucque promovenda,
d. donec crus erectum idem attingat. Si verò
XII. crus normæ brevius sit, quam ut punctum I
C in dis- attingere possit, cum filo ex puncto I exten-
EI. do coincidere debet.

THEOREMA LXXIX.

488. Si recta IK sit ad planum ABCD
& ex co- perpendicularis; planum quodcunque eg. EH Tab. XIX.
t puncto GP, quod per eam ducitur, ad idem planum Fig: 147.
quod ad BC perpendiculare est. DE-

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad sectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam IK ad HG perpendicularis *per hypoth.* LM ipsi IK parallela (§. 217.). Porro perpendicularis est ad planum ABCD *per hypoth.* ergo etiam perpendicularis est ad idem planum LM (§. 477.); consequenter planum EHGF rectum est ad planum ABCD (§. 461.). Id quod de alio omni plano, quod per ipsam ducitur, verum est. Q. e. d.

THEOREMA LXXX.

489. Sectio NO duorum planorum EFH & IKLM ad idem tertium ADCB perpendicularium est ad idem planum perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Tab: XIII.

Fig: 164.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendicularare *per hypoth.* ex puncto O poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 484.). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse in plano IKLM ad planum ADCB perpendiculararem. Sed ad idem punctum O eadem planum ADCB unica tantum perpendicularis interstare potest (§. 473.), & etiam communi sectioni NO duorum planorum IKLM & EFGH sectio NO unica recta est; ergo ista recta NO sive sectio duorum planorum perpendicularium ad idem tertium ADCB ut perpendicularis non suscipi non potest. Q. e. d.

CO

COROLLARIUM.

490. Quod si, ergo juxta perpendiculara AB Tab. II.
& EF oculò constitutò in C & G respiciatur Fig. 32.
per puncta H & D, cum planum mensulæ
Prætorianæ in praxi geometrica ad horizon-
tem componatur; prodibit sectio planorum
HCBD & GHFD recta HD, adeoque perpen-
dicularis plano tabulæ (§. 489, 488). Itaque
punctum H imminebit puncto D (§. 487).

SCHOLIUM.

491. In praxi geometrica tabulâ mensuriâ
duplici motu ad angulum rectum præditâ uti-
mur, tamdiu scilicet huc vel illuc promoven-
dâ, donec sectio filaris planorum transeat per
acum in H & per clavum in D. Hoc modo
obtinetur, ut vertex anguli in tabula immineat
vertici anguli in solo. Id quod demon-
strandum superius §. 134, 254. promissimus.

THEOREMA LXXXI.

492. Plani KLGE ad planum ABDC in
omnibus punctis F, f &c. inclinatio eadem.

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & f perpendiculara Tab. XIII.
res FH & fh in plano ABDC, & aliæ EI & fi Fig. 150.
in plano EKLK (§. 182.), siquæ HF = hf
& FI = fi, erunt HF & hf, itemquæ FI &
fi parallelæ (§. 217.); consequenter etiam
Hh & li parallelæ ipsi Ff. Cum verò sit Hh

$$= Ff$$

\equiv Ff, & li \equiv Ff (§. 218.), adeoque etiam
 Hh parallela ipsi li (§. 158.); sitque etiam Hh
 \equiv li (§. 77. Ar.), erunt proinde Hl & li
 inter se æquales (§. 218.). Igitur anguli
 & f æquales (§. 159.), atque adeò inclina-
 tio plani ad idem planum in singulis punctis
 eadem (§. 465, 45.). Q. e. d.

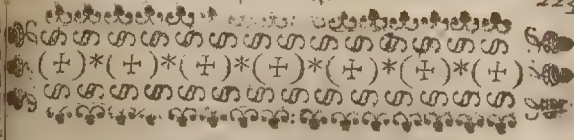
COROLLARIUM.

493. Mensura itaque anguli inclinationis
 planorum f, est arcus inter perpendiculares
 ad sectionem hf & fi interceptus atque et
 f ductus (§. 48, 265.).

Finis Partis Primæ.



* * * *



ELEMENTA GEOMETRIÆ

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ
PROPONIT.

CAPUT I.

DE PRINCIPIIS GEOMETRIÆ SOLIDÆ.

DEFINITIO I.



Solidum sive *Corpus* est magnitudo tri-
bus dimensionibus prædita, seu exten-
tensum in longitudinem, latitudinem
atque profunditatem.

P

DE-

DEFINITIO II.

Tab: XIV.
Fig: 165.

495. *Angulus solidus B* est, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem puncto non constitutis, ad idem tamen punctum continentibus, continetur.

Dicuntur autem *Anguli solidi æquales*, inter se invicem positi congruunt.

COROLLARIUM I.

496. Ut anguli solidi sint æquales, angulis & multitudine & magnitudine æqualibus ac ordine eodem dispositis continentibus; ut scilicet plana angulos planos æquales contentia æqualiter ad se invicem clinentur (§. 465.).

SCHOLION.

497. Bene nimirum TACQUETUS servat de angulis solidis, qui ex planis inclinatione oriuntur, eodem modo rationandum esse, quò de planis angulis, qui oriuntur ex linearum ad se invicem inclinatione.

COROLLARIUM II.

498. Cum anguli solidi distingvi non possint, nisi per planos, quibus continentur (§. 495.), plani verò si fuerint similes, etiam æquales, & contra (§. 147, 156.) sequitur si fuerint anguli solidi similes, etiam æquales; & contra (§. 497.).

COROLLARIUM III.

II.

si pluribus
eodem plani
angulum con
a quales,
e.

499. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes efficiant 360 gradus, planum circuli sternunt (§. 33, 48.), adeoque solidum angulum non constituunt (§. 495.); quare summa angulorum in omnibus planis solidum angulum constituentibus quatuor rectis, seu 360 gradibus minor esse debet.

M I.

DEFINITIO III.

angulis
ine æqu
ontineri
lanos æ
in vicem

500. Corpus regulare est solidum planis regularibus & inter se æqualibus ad constituendos angulos terminatum. Reliqua corpora dicuntur irregularia.

SCHOLION.

ETUS
x plani
odo rati
lis, qui
inclinatione

501. Corpora regularia dicuntur etiam Platonica, propterea quod PLATO in Timæo corpora, quæ statuit simplicia, Cælum scilicet, ignem, ærem, aquam, atque terram cum eadem comparat.

COROLLARIUM.

I II.

gyi non
inentur
niles, e
47, 156,
niles, e
7.)

502. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero & magnitudine æqualibus contineatur (§. 501.), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 496.).

DEFINITIO, IV.

M III.

503. Si figura rectilinea ACB juxta du-Tab: XIV.
tum lineæ rectæ AE motu sibi semper pa- Fig: 166.
P₂ rallelo

rallelo deorsum feratur, *Prisma* ABCDFE describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis; *obliquum* vero, si linea directrix ad idem planum fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare* sive *trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit planum quadrangulare; & ita porro.

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. 504. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales, circumcirca terminatur tot parallelogrammum quot latera basis habet. Est enim AC & ED parallela & æqualis per hypoth. Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 89.). Idem modo de cæteris planis lateribus ostenditur.

COROLLARIUM II.

505. In prismate plana sectionum parallela ACB, HIG sunt inter se æqualia. Aequatur enim plano describenti ACB (§. 34. Geom: & §. 73. Arithm:); ergo & inter se æqualia sunt (§. 77. Arithm:).

DEFINITIO V.

Tab: XIV. 506. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE sit lateris AB æqualis, angulus præterea BAE DAE rectus; *Cubus*, sive *Hexædrum* dicitur.

COROLLARIUM.

507. Cubus itaque terminatur sex quadratis inter se æqualibus (§. 84. 322.); Et ejus plana sectionum basi parallela factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 506. & §. 73. *Arithm.*); consequenter etiam æqualia inter se (§. 77. *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

508. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *parallelepipedum* describitur. Tab: XIV. Fig: 167.

COROLLARIUM.

509. Plana sectionum basi parallelæ sunt parallelogramma ipsi æqualia (§§. 508. *Geom.* 73. *Arithm.*); adeoque & æqualia inter se (§. 77. *Arithm.*). Terminatur quodque parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum duo opposita inter se æqualia sunt (§. 89.).

DEFINITIO VII.

510. Si circulus AB, juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus*, si recta CE, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum perpendicularis; *Scalenus Cylindrus*, si dicta Axis CE ad angulos obliquos diametro DE consistat. Describitur etiam *Cylindrus rectus*, si parallelogrammum rectangulum CBDE circum circumferentiam unum CE gyretur. Tab: XIV. Fig: 168.

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. 511. Sunt ergo ex *genesis* rma non mod
Fig: 168. bases Cylindri AB & DE æquales, verum
tiam sectiones basibus parallelæ sunt circ
& inter se æquales (§. 73. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

512. Ex *genesis* verò 2da: Superficies Cylindri recti demptis basibus æqualis est rectangulo, cujus basis peripheria, & altitudo ipsa altitudo Cylindri.

DEFINITIO VIII.

Tab: XIV. 513. Si recta quædam KM in peripheria
Fig: 169. circuli NM ita incedat, ut constante in
reat puncto fixo K; describetur conus NMK. Punctum K *vertex*, recta verò EL, quæ
puncto K ad diametrum basis ducitur, *Axis*
Coni appellatur. *Rectus Conus* est, cum
axis KL ad diametrum baseos circularis per
pendicularis est; *Scalenus vel obliquus*, cum
axis ad diametrum plani circuli inclinatus
ad angulos obliquos. Linea describens
est *latus Coni*. Possumus quoque *Coni* ge
sim ita concipere, ut circellus infinite
vus motu sibi semper parallelo ita deor
feratur, ut cum centrum continuò sit in
KL, tum radius PQ axi PK proportionalit
continuò augeatur. Describitur etiam *Co*
nus rectus, si triangulum rectangulum KLM
circa rectam KL circumvolvatur.

COROLLARIUM.

Tab: XIV. 514. Quoniam per ultimam *Coni* *genesis*
Fig: 169. PQ

non mod PQ ipsi LM parallela, erit KL: PK = LM:
s, verum PQ (§. 230.). Quare cum PQ & LM sint
sunt circ radii circularum sibi invicem parallelorum;
um:). planum parallelæ sectionis basi conī est cir-
culus basi minor.

III.

SCHOLION.

erficies C
alis est
& altitud
III.
a peripher
ntes in
onus NM
EL, quæ
citur, A
est, cum
cularis p
liquus, c
i inclin
ribens
Coni ge
nfinite p
ta deor
dō sit in
ortional
etiam
gulum KL

515. Quoniam in cono obliquo latus cont
non ejusdem longitudinis in quovis periphe
ria puncto; patet lineam describentem KM,
quæ altero sui extremo peripheriæ NM con
stanter adheret, per punctum fixum K aliqua
sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri
debere. Unde patet in definitionibus geo
metricis geneticis tanquam entium imagi
nariarum admitti etiam posse miraculosa.

DEFINITIO IX.

516. Si semicirculus AKB juxta diame
trum AB revolvatur; sphaera describitur. Di
ameter circuli AB est etiam Diameter, item
Axis sphaerae: centrum C etiam est centrum
sphaerae.

COROLLARIUM.

517. Omnes ergo rectæ ex sphaerae super
ficie in centrum ductæ sunt inter se æquales
(§. 32.).

DEFINITIO X.

518. Pyramis est solidum terminatum cir
cum circa tot triangulis ADC, CDB & BDA
in uno puncto D coeuntibus, quot basis ABC
latera habet. Dicitur autem triangularis,
24 qua

Tab: XIV.
Fig: 169.

Tab: XIV.
Fig: 170.

Tab: XIV.
Fig: 171.

*quadrangularis, quinquangularis &c. si bas
lis triangularis, quadrangularis &c.*

COROLLARIUM I.

Tab: XIV. 519. Si ac, cb, ba, lateribus basis AC, C

Fig: 171. BA parallelæ ducantur, erunt anguli a, b
æquales angulis A, B, C (§. 292.); conse
quenter $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§. 230.); igit
quævis pyramidis triangularis sectio basi pa
rallela, est eidem basi similis.

COROLLARIUM II.

520. Quoniam pyramis multangularis
tot triangulares resolvi potest, quot sunt
tera baseos demptis duobus, nempe quadran
gularis in duas, quinquangularis in tres &c.
si pyramis multangularis plano basi paral
læ secetur, erunt omnia triangula in secti
onibus similia omnibus triangulis in basi
519.); consequenter & totum planum sec
tionis simile toti basi (§. 156.). Igitur in qu
vis pyramide planum sectionis basi paral
lelæ est eidem basi simile.

DEFINITIO XL.

Tab: XIV.

Fig: 172.

175.

173.

Tab: XIV.

Fig: 174.

521. Tetraëdron est solidum quatuor,
Octaëdron est solidum octo;
Icosaëdron est solidum viginti triangulis
quilateris & æqualibus comprehensum. Do
decaëdron verò est solidum duodecim pen
tagonis regularibus & æqualibus constans.

DEFINITIO.

522.

522. *Mensura solidi est cubus, cujus latus perticæ unius æquale, diciturque pertica cubica.* Hæc dividitur in *pedes*, vel *perticulas*, *digitos*, *lineas* &c. cubicas, hoc est in cubos, quorum latus pedem vel perticulam, digitum, lineam &c. adæquet.

Tab: XIV.
Fig: 165.

CAPUT II.

DE SOLIDORUM CONSTRUCTIONE ET DIMENSIONE.

PROBLEMA I.

523. *Describere Retia, ex quibus corpora regularia, nem Cylînder, Prisma, Pyramis & Parallelepipedum construi possent.*

RESOLUTIO.

I. *Pro Hexædro seu Cubo: sex quadrata conjuncta fiant.* Tab: XIV.

II. *Pro Tetraëdro siue pyramide triangulari regulari.* Trianguli æquilateri ABC latera bissecantur, dein ducantur rectæ xz, zy. Fig: 176.
Tab: XIV.
Fig: 177.

III. *Pro Octaëdro; Octo triangula æquilatera æqualia jungantur (§. cit:).* Tab: XIV.
Fig: 178.

IV.

Tab: XIV. IV. *Pro Dodecædro*: Delineentur, & *firmu*
 Fig: 179. pentagona æqualia (§. cit:). Compendio *sub t*
 verò delineantur; si à quolibet pentagoni *pro*
 gulo o & i &c. per duo oppositi lateris ex
 trema rectæ ducantur qh & is, tum fiat
 — ts &c. tandem intervallò lateris eodem
 ot vel ts intersectiones fiant in x; in z &c.
 ut figura claudatur.

Tab: XIV. V. *Pro Icosædro*: Viginti triangula *altitu*
 Fig: 180. quilatera æqualia jungantur, ut figura clau *sela t*
 monstrat (§. cit:). *quatu*

Tab: XIV. VI. *Pro Parallelepipedo*: 6 paralle *sela i*
 Fig: 181. gramma; quæ duo opposita sint æqualia, & *et C.*
 scribantur (§. 508.).

Tab: XIV. VII. *Pro Prisme triangulari*: tria *Si*
 Fig: 182. rallelogramma æqualia & duo triangula *non c*
 quicrura delineentur (§. 503.). *lineo*

Tab: XIV. VIII. *Pro Cylindro*: imò. Fiat recta *finité*
 Fig: 183. gulum ABCD, cujus longitudo seu basi *gulis*
 DC sit æqualis peripheriæ baseos circularis *go K*
 BASI, altitudo verò AD altitudini ipsius *confi*
 lindri. *198.*

2dò. Pro bassibus describantur duo circuli
 A & D radiò datæ baseos circularis
 512.). *ra ist*

Tab: XV. IX. *Pro Pyramide eg. quadrangulari*. *folvi*
 Fig: 184. Ducatur arcus AB, & in eo datæ baseos *eti f*
 FD latus ED quater collocetur. (§. 508.). *altitu*
 Eodem modo quævis pyramidis basis poly *(S. 3*
 gona determinatur, etiamsi latera baseos *H*
 æqualia sint. Omnia scilicet latera inæqua *per*
 lia in arcu ponenda. *supe*
qué
frat
HM
NE

S C H O L I O N.

524. Quomodo verò dicta corpora con *firmu*
NE

struantur; item in plano describantur; visu
sub tempus prælectionum, & attentione ad
projectiones opticas tantum opus est.

THEOREMA I.

525. Superficies Coni recti seclusa basi æ- Tab: XV.
qualis est triangulo, cujus basis peripheria, Fig: 185.
altitudo latus Coni. Sectione verò basi paral- 190.
lela truncati conii recti ACDB superficies æ-
quatur trapezio NHIO; cujus latera paral-
lela NO & HI sunt peripheriæ basium AB
& CD, altitudo autem KL est latus conii AC.

DEMONSTRATIO.

Si fuerit arcus LM infinitè parvus, à recta Tab: XV.
non differet, ac proinde $\triangle KLM$ pro recti- Fig: 185.
lineo habebitur; cum verò angulus K sit in- 190.
finitè parvus; anguli L & M pro rectis an-
gulis habebuntur (§. 207.); erit er-
go KM ad LM perpendicularis (§. 67.);
consequenter erit KM altitudo $\triangle KML$ (§.
198.). Sed conii recti superficies in innume-
ra istiusmodi triangula inter se æqualia re-
solvitur (§. 513, 159.), ergo integra conii re-
cti superficies æqualis est triangulo, cujus
altitudo lateri, basis peripheriæ conii æqualis
(§. 376.). Q. e. unum.

HI & NO æquales peripheriis CD & AB
per hypoth: altitudo verò ML = KL; item
superficies conii minoris ECD = MHI, at-
que majoris ACDB = NHIO per demon-
strata; igitur AEB = CED = NMO =
HMI (§. 81. Arithm.); hoc est ACDB =
NHIO Q. e. alterum. CO-

COROLLARIUM I.

526. Superficies conī rectī æqualis est fe-
cteri circuli, qui pro radio latus conī; pro
arcu peripheriam baseos ejusdem conī habet
at (§. 412.).

COROLLARIUM II.

Tab. XIV.

Tab. XV.

Fig. 169.

185.

527. Quodsi basim conī designet B, fe-
perficiem ejusdem sclusa basi S, semidiamet-
trum baseos R; peripheriam P, latus conī L
erit B: S = RP: LP (§. 409, 375.) sive
B: S = R: L (§. 157. Arithm.). Est et
go basis conī rectī ad superficiem suam pro-
sa basi, ut radius baseos, ad latus ejusdem
conī.

THEOREMA II.

Tab. XIV.

Fig. 163.

172.

528. Cubus, Tetraëdron, Octaëdron,
Dodecaëdron, & Icosaëdron sunt corpora
regularia; nec præter hæc quinquē aliud re-
gulare corpus possibile.

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdron quatuor
octaëdron octo, icosædron viginti trian-
gulis regularibus, dodecaëdron denique duodecim
pentagonis regularibus inter se
qualibus terminatur (§. 507, 521.). Quod
num.

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in
icosædro quinquē anguli plani trianguli re-
gularis ad angulum solidum efficiendum con-
currunt (§. 523.). Quo-

I. Quoniam verò sex istiusmodi angulorum

summa est 360° (§. 210.), itaque triangulis regularibus nullum corpus præter illa tria contineri potest (§. 499.).

In cubo tres anguli quadrati solidum angulum efficiunt (§. 523.); quare cum sum-

ma quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 84, 126.) quadratis nullum corpus continetur, nisi cubus.

In dodecædro tres anguli plani solidum angulum constituunt (§. 523.); quia verò

summa 4 istiusmodi angulorum est 452°, & summa trium angulorum in hexagono regula-

ri est 360°, atque in reliquis figuris regula-

ribus 360° major (§. 326.), ad angulum verò solidum constituendum tres saltem plani anguli requiruntur (§. 495.); pentagonis regularibus unicum dodecædram, figuris verò plurium laterum nullum aliud regulare corpus terminari potest. Corpora igitur regularia quinque tantum sunt. Q. e. alterum.

PROBLEMA II.

529. Superficiem ac soliditatem cubi determinare.

Tab. XV.

Fig. 186.

RESOLUTIO.

I. Pro superficie.

Cum

Cum superficies cubi ex 6 quadratis æqualibus componatur (§. 507.).

1mò. Latus cubi in se ipsum ducatur, &

2dò. Factum per 6 multiplicetur (§. 352.).
hoc est $3 \cdot 3 = 9$, & $9 \cdot 6 = 54$.

II. Pro soliditate.

1mò. Inveniatur basis per §. 352.

2dò. Basis multiplicetur per latus cubi.
Scilicet $3 \cdot 3 = 9$, & $9 \cdot 3 = 27$.

DEMONSTRATIO.

Tab. XIV.

Fig. 168.

Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, perticulæ &c. æqualia (§. 522.), si latus cubi in partes quotcunque æquales divisum concipias, tot erunt cuborum ordines, quot in latere AB partes, & in quolibet ordine tot cubi minores, quot quadrata in basi ACFE reperiuntur. Quare basim ACFE per latus cubi AB multiplicata prodibit numerus cuborum minorum, e quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

530. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000. Quare cum pertica Geometrarum 10 perticularum, perticula 10 digitorum &c. (§. 19.), pertica cubica geom: est 1000 perticularum cubicarum, perticula cubica est 1000 digitorum cubicorum &c. Fractionum ergo decimalium cubicarum denominatores progrediuntur in ratione millecupla (§. 344. *Arithm.*); consequenter tribus notis fractio-

dratis 32 nes decimales cubicæ exprimendæ, si loga-
rithmis denominatorum locò utamur (§.
346. *Arithm.*).

(§. 352.)

Ex. gr. Si latus cubi EF 274 erit so-

Tab: XIV.

Fig: 165.

oliditas 20570824 = 20570824 §. 357

Geom: §. 220. *Arithm.* Sed superficies es-

2.

tus cubi

est 450456 (§. 357, 362.).

O.

COROLLARIUM II.

bi, quorum

qualia (1

cunquæ 2

ant cubi

rtes, &c.

quot qu

Quare

multiplia

orum, e

531. Quodsi latus cubi 12, erit soliditas
1728 (§. 529.). Quare si pertica exdivisio-
ne civili sit 12 perticularum, perticula 12 di-
gitorum &c. cujusmodi est pertica Rhenana;
pertica civilis cubica est 1728 perticularum,
perticula cubica 1728 digitorum cubicorum.

Hinc si inventam soliditatem 20570824 di-
vidas per 1728, quotus erit 11904 & 712.

I.

Quodsi 11904 iterum divides per 1728, quo-
tus erit 6, & 1536, adeoque habebis 6,

1536, 712. Patet aded quantum divisio
mensura in 10 partes præstet divisione in 12.

COROLLARIUM III.

532. Cubi sunt in ratione triplicata late-
rum (§. 230. *Arithm.*).

Tab: XIV.

Fig: 198.

Ex.

*Ex. gr. Si fuerit latus unum ad aliud ut
1 ad 2, erit cubus unus A ad alium B, ut
ad 8. Aequales itaque cubi sunt, si latera
æqualia habeant.*

THEOREMA III.

533. *Parallelepipedum, Prisma, Cylindrus,
Pyramides & Coni, quorum bases & altitudines
æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Tab: XV. Si enim Parallelepipedum, Prisma, Cylindrus &c. in discos crassitie quantulibet minimæ secari cogitentur sectionibus parallelis, siquidem per hypothesim bases & altitudines æquales, ex uno tot disci prodibunt æquales, quot ex altero (§. 509, 509, 511, 520, 514.); consequenter cum disci omnes simul sumpti cum corporibus idem sint (§. 85. *Arithm.*), corpora tota inter se æqualia sunt (§. 78. *Arithm.*). Q. e. d.

PROBLEMA III.

Tab: XIV. 534. *Metiri superficiem ac soliditatem
Fig: 167. Parallelepipedum.*

RESOLUTIO.

Pro Soliditate.

- I. Quæratür area baseos LIKM (§. 362.).
- II. Multiplicetur per altitudinem LN.

Ex.

Ex. gr. Sit $LM = 36$, $MK = 15$

$$LN = 12$$

$$LM = 36$$

$$MK = 15$$

$$\text{Basis LIKM } 540$$

$$LN = 12$$

$$180$$

$$36$$

$$1080$$

$$54$$

balis 540 Soliditas 6480

Pro Superficie.

I. Quærat^rur ar^ea parallelogrammorum
 LMK, LMON & OMPK (§. cit:).

II. Addantur in unam summam, & summa
 hæc multiplicetur per 2.

Ex. gr. $LM = 36$, $LM = 36$, $MK = 15$
 $MK = 15$, $MO = 12$, $MO = 12$

$$180$$

$$36$$

$$72$$

$$36$$

$$30$$

$$15$$

$$LIKM = 540, LMON = 432, MOKP = 180$$

$$LIKM = 540$$

$$MOKP = 180$$

$$1152$$

$$2$$

Ex. Superficies 2304

Q

535.

THEOREMA IV.

Tab: XV. 535. Planum diagonale $AHFD$ dividit
Fig: 187, parallelepipedum $ABDCFE$ in duo
prismata $ADCFH$ & $ADBEFH$ inter se
qualia.

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum
in duo triangula ACD & DBA equalia
(320.). Habent ergo prismata bases æqua-
les, sed etiam altitudinem AH eandem
habent (§. 197.); igitur $ADCFH = ADBEFH$
(§. 533.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

536. Prisma igitur triangulare est di-
viduum parallelepipedum super dupla basi, (secus)
jussdem altitudinis.

PROBLEMA IV.

537. Metiri superficiem ac soliditatem
prismatis.

RESOLUTIO.

Pro Superficie.

Tab: XIV. I. Quæraturs basis (§. 379, 385, 398)
Fig: 166. multiplicetur per 2.

II. Quærantur etiam areæ parallelogram-
morum prisma circumcirca terminantium
& earum summa addatur facto antecessoris, hoc
est altitudinem

Pro Soliditate.

afis B

CAPUT II. DE SOLIDIS CONSTR. ET DIMEN.

Basis BAC per altitudinem CD multiplicetur.

Ex.gr. Sit $BC = 432$, $AG = 357$

$$CD = 869$$

$$\begin{array}{r} BC = 432 \\ AG = 357 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AC = 432 \\ CD = 869 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ 1080 \\ 648 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3888 \\ 2592 \\ 3456 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Basis } 77112 \cdot ACDE \cdot 375408 \\ CD = 869 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 694008 \\ 462672 \cdot 2 ABC \cdot 154224 \\ 616896 \end{array}$$

$$\text{Superf. } 1280448$$

$$\text{Solidit. } 67090328$$

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedum super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 536.). Quodsi verò dupla basis, hoc parallelogrammum multiplicetur per altitudinem; soliditas parallelepipedum prodit (§. 534.). Ergo si dimidia parallelepipedum, hoc est, basis prismatis triangularis per altitudinem multiplicetur, parallelepipedum dimidium, id est: prismatis soliditas habetur.

Q² Cum

Cum omnia prismata reliqua in triangularia
resolvi possunt, eorum quoque soliditas pro-
dit, si basis per altitudinem multiplicetur
Q. e. d.

PROBLEMA V.

538. Data diametro AB & altitudi-
ne CF ; invenire superficiem ac soli-
tatem ejus.

RESOLUTIO.

Pro Superficie.

Tab. XIV.
Fig. 168.

I. Quærat peripheria baseos & basi-
s (S. 432.), hæcque multiplicetur per

II. Peripheria ducatur in altitudinem
& tum hoc est superficies seclusis basibus
(S. 12.).

III. Addatur factum antecedens per
lam rimam inventum.

Pro Soliditate.

Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit $AF = 56$, $CF = 246$;

Peripheria = 17584

$CF = 246$

105504

170336

35168

Superfi-

angularis superf: absque basi == 432566400
 Soliditas prismatis per triplicem Duplum basis == 492352

Superficies == 4818016

Basis == 246176

2460

14770560

984704

492352

Soliditas == 603592960

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus est polygonum infinitorum laterum per demonstr: (§. 409.), Cy-
 linder æqualis erit prismati infinitorum la-
 terum (§. 503. 510.). Ejus ergo soliditas
 invenitur, si basis, ducatur in altitudinem (§.
 537.). Q. e. d.

THEOREMA V.

539. Prisma triangulare in tres pyrami-
 des æquales dividi potest.

Tab: XIV.
 Fig: 166.

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum ACB parallelum plano
 DFE (§. 503.), pyramides ABCF & DFEA
 Q3 habent

habent altitudinem eandem (§. 480.), atque
 bases ACB & DFE æquales (§. 524.).
 ergo pyramis ACB = pyr: DFE. Simi-
 ter cum BEFC sit parallelogrammum (§.
 504.), $\triangle CFB = \triangle BFE$ (§. 320.). Ha-
 bent itaque pyramides ACBF & BEFA ba-
 ses æquales; sed etiam altitudinem eandem
 habent (§. 474, 197.), consequenter æqui-
 les sunt (§. 533.). Tres igitur istæ pyr-
 mides inter se æquales sunt (§. 77. *Arithm.*
Q. e. d.

S C H O L I O N.

540. Si ex ligno paretur prisma, & se-
 tur, id quod in prælectionibus faciemus, demon-
 stratio captui Tyronum magis accommodata.

C O R O L L A R I U M I.

541. Pyramis triangularis est tertia pars
 prismatis super eadem basi & ejusdem al-
 titudinis.

Et quoniam multangulare quodvis in tri-
 angularia resolvitur per diagonales; quæ
 liber pyramis est pars tertia prismatis super
 eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 162.
Arithm.).

C O R O L L A R I U M II.

542. Quia conus pro pyramide infinitangula
 haberi potest (§. 513, 518.), si scilicet po-
 lygonum infinitorum laterum pyramidem
 describat eo modo, quo conum circellus (§.
 513.) & Cylindrus pro prismate infinitan-
 gulo sumi potest, si loco circuli polygonum
 infi-

...atorum laterum Cylindrum describat (§. 510.); quemadmodum Cylindrum cum pri-
...ate ejusdē baseos & altitudinis, ita etiam co-
...um cum pyramide ejusdē baseos & altitudinis
... equalia erunt (§. 81. Ar.), atque adeo *congruē*
... *3tia* Cylindri super eadē basi & altitudine
... cit:).

PROBLEMA VI.

543. Metiri superficiem ac soliditatem Py- Tab. XIV.
midis & Coni. Fig: 169.
171.

RESOLUTIO.

Quærat^r soliditas prismatis vel Cylindri
eandem cum pyramide vel cono basim ha-
bentis (§. 537. 538.), inventa^rque per 3.
multiplicetur. Quotus erit soliditas pyramidis
vel cono (§. 541. 542.).
Vel

Multiplicetur basis per tertiam altitudinis
partem; aut contra.

Ex. gr. Si soliditas Prismatis fuerit

2010328 (§. 537.) erit soliditas pyrami-

670109 2/3. Si soliditas Cylindri fuerit

205792960 (§. 541.) erit soliditas cono:

6859760.
Si soliditas pyramidis habetur, si tam ba-
sis, quam triangulorum lateraliū AC
CBD, BDA areæ inveniantur (§. 379.),
atque in unam summam addantur.

Tab. XIV.
Fig: 171.

Q4. Coni.

Tab. XIV. Coni recti superficies prœdit; si peripheria
Fig. 169. baseos in latus ejus dimidium ducatur (525.), & lacto huic area baseos addatur.

Ex. gr. Si diameter Coni $NM = 50$

erit peripheria 17584 , basis 246176 (

432.). Sit altitudo $KL = 246$. Quoniam

qm $LM = \frac{1}{2} NM = 28$, & $KM = \frac{1}{2} NM = 28$

$KL + LM = 60516 + 784 = 61300$

(§. 415.); erit $KM = 2475$ (§. 249.)
consequenter superficies coni dempta basi

76020 , & hinc integra 2422196 (§. 385. Arithm.).

PROBLEMA VII.

Tab. XV. 544. Metiri superficiem ac soliditatem
Fig. 190. Coni recti truncati.

RESOLUTIO.

Pro. Superficie.

I. Mensuretur latus AC & diametri basium CGD & AFB (§. 113.), invenianturque peripheriæ basium CD & AB (§. 432.).

II. Tum semisumma basium multiplicetur per latus AC (§. 525. 385.).

Ex.

Ex. gr. Sit $AC \overset{III}{=} 1005$, $\&$ *diametri*

$AFB \overset{I}{=} 8$, $CGD \overset{I}{=} 6$, *reperietur peri-*

pheria major $AB \overset{III}{=} 2512$, *peripheria mi-*

nor $CD \overset{III}{=} 1084$ (§. 432.); *proinde*

$\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CD \overset{III}{=} 2198$, *itaque su-*

perficies conii truncati $\overset{III}{=} 2198$. $1005 \overset{III}{=} 2198$.

$20 \cdot 89 \cdot 90$

Pro Soliditate.

Si dentur, aut mensurentur diametri basi-
um AB & CD , atque altitudo GF ; demissa
ex C perpendiculari CH ad diametrum AB ,
cum etiam sit axis EF ad diametrum in co-
no recto perpendicularis (§. 513.), erunt
 CH & EF parallelæ (§. 477.). Quare cum
 $\triangle EAF$ secet duo plana parallelæ CD & AB
per hypoth. erunt semidiametri CG & AF
parallelæ (§. 481.), consequenter $CG \overset{III}{=} HF$
(§. 196.); & $CH \overset{III}{=} FG$ (§. 205.); i-
deoquæ

I. Inferatur $AH:HC \overset{III}{=} AF:FE$ (§. 229.) hoc est: ut differentia semidiametro-
rum ad altitudinem conii truncati, ita semi-
diameter major ad altitudinem conii integri
per §. 283. *Arithm.* inveniendam.

II. Ex hac altitudine inventa subtrahatur
altitudo conii truncati GF , ut relinquatur al-
titudo conii ablatis EG .

III.

III. Quærat^{ur} soliditas conorum CED & AEB (§. 543.).

IV. Denique coni minoris soliditas ex majore auferatur; residuum est soliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sit $AB = 36$, $CD = 20$, $FG = CH$

12, erit $AF = 18$, $CG = HF = 10$, & AE

$= 8$; adeoque $FE = 27$ (§. 280. Ar.)

& $GE = 15$ (§. 90. Arithm.); invenietur

quæ soliditas coni AEB $= 9156240$, & con-

ni CED $= 1570000$ proinde 9156240

$- 1570000 = 7586240$ soliditati coni truncati CDBA.

Tab. XV. 545. Quod si dentur diametri. basium & altitudo coni truncati, cum sit $GF = CH$
Fig. 190. & $CG = HF$ per demonstr. ut latus n.
n. I.

mensuretur, opus non est, sed cum CH

2
 2
 $AH = AC$ (§. 415.) invenietur AC per §. 240. Arithm. superficiesque juxta resolutionem problemæ obtinabitur.

Quod verò dicimus de cono truncato recto, id quoque verum est de obliquo.

Tab. XV. Et in genere cum parallelepipeda, Cylindri, prismata, pyramides, coni obliqui ad recta corpora reduci possint, si ponantur inter ea

189.

dem

dem, parallelas & ejusdem sint baseos (§. 533.); quin dictorum corporum scalenorum superficies & soliditas juxta resolutionem Problematum inveniri possit, dubitandum non est.

THEOREMA VI.

546. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radius sphæra.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphærae in quadratula infinite parva resoluta, quæ à planis non differunt, & ex centro concipiantur ad eam angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro cœuentibus, quarum altitudines à radiis differunt quantitate inaffigibili, hoc est revera nulla, bases verò simul sumptæ superficiei sphærae æquantur. Tota igitur sphæra habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphærae. Q. e. d.

THEOREMA VII.

547. *Cylindrus æqualis basis & altitudinis cum sphæra est ad eandem ut 3 ad 2.*

DEMONSTRATIO.

Si Quadratum ABCD cum inscripto quadrante CDB & Δo ADC circa latus AB convertatur; quadratum ABCD Cylindrum (§.

Tab: XV.

Fig: 198.

191.

Tab: XV

Fig: 191.

(§. 510.), quadrans hæmisphærium (§. 516.), triangulum conum (§. 513.) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit DC (§. 197.); si ea in discos infinitè parvæ crassitiæ fiantur, numerus eorum in dictis corporibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci Cylindri; erit EG semidiameter disci hæmisphærii, EF semidiameter disci coni. Cum verò hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 116.), erunt inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 407.); hæc est, cum sit, propter parallelismum EH & CB *per hypo.*: $EH = CB$ (§. 205.) $= CG$ (§. 32.), atque ob CD $DA = CE$: EF (§. 229.) & CD $= DA$ (§. 84.) etiam $EC = CF$ (§. 128. *Ar.*) ut quadrata rectarum CG, EG & EC.

Quare si discum coni à disco Cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§. 415.). Cum ergo de omnibus discis idem verum est, numerusque eorum idem sit *per dem.* soliditas sphæræ totius relinquetur, si soliditas coni ex soliditate Cylindri subtrahatur. Sed conus est tertia pars Cylindri (§. 541.), ergo $3 - 1 = 2$ soliditati scilicet sphæræ, itaque Cylindrus est ad sphæram, ut 3 ad 2. *Q. e. d.*

SCHOLIUM.

548. Ingeniosissimi ARCHIMEDIS Theorema; tantique istud fecit, ut tum suo sphæram Cylindro inscriptam apponi co-
luerit; quo indicio monumentum ejus detexti
disertissimus CICERO. Quem probe verum
tum mathematicis in disciplinis opera philo-
so-

sophica probant; sine quibus perfectum fieri Oratorem nulla ratione posse ipse confirmat, lib: 1. de Oratore: Mea quidem sententia, ait, non poterit esse omni laude cumulatus Orator, nisi erit omnium rerum magnarum atque artium scientiam consecutus. Quae tam igitur, cogitare scilicet rectè, atque unum ex alio inferre, quae Philosophia debemus, Rhetoricæ, ut illius principia, præponenda sunt. Scribendi rectè, sapere est principium & fons: HORATIUS de arte Poet. Quo verò ordine Mathesis collocanda docuit PLATO apud Theonem Smyrn. Adolescentibus, eorumque ætati conveniunt disciplinæ mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipsa ad capeffendam Philosophiam idonea reddatur.

THEOREMA VIII.

549. *Cubus diametrò sphæræ descriptus est ad sphæram propemodum ut 300 ad 157.* Tab: XV. Fig: 197.

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (S. 522.), & Cylindrus cum sphæra ejusdem baseos & altitudinis 785000 (S. 538.); consequenter soliditas sphæræ 1570000: 3 (S. 547. Geom: 214. Arithm:). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut

1
1000000 ad 523333—, hoc est, multipli-

3
cando per 3 ut 3000000 ad 1570000 (S.

153.

153. *Arithm.*), & dividendo per 10000, ut
300 ad 157 (§. 153. *Arithm.*): Quæ d.

*Afferitur vero in demonstratione ratio
prope vera, nam ratio diametri ad periph-*
eram est tantum prope vera (§. 430.).

THEOREMA IX.

Tab. XV: 550. *Superficies sphaerae est quadrupla*
circuli maximi ejusdem sphaerae.
Fig: 198.

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphaera æqualis est pyramidi
cujus basis est superficies sphaerae, altitudo
verò radius ejusdem (§. 546.), soliditas
sphaerae componitur ex duobus factoribus
ex sexta scilicet parte diametri & ex ipsa
superficie sphaerae (§. 543.). Si ergo soli-
ditas sphaerae per sextam diametri partem di-
vidatur, quotus erit superficies integra sphae-
rae (§. 184. *Arithm.*): Sed est etiam soli-

ditas sphaerae factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi
in diametrum sphaerae (§. 547, 538.): qua-
re si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri divides,

quotus erit $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 212. *Ar.*).

Cum igitur quotus iste sit & superficies integra
sphaerae, & est superficies comparata ad circu-
lum maximum sphaerae per demonstrata, su-
persi-

perfacies sphæræ est omnino quadrupla circuli
maximi ejusdem sphæræ (§. 195. Ar.). Q. e. d.

COROLLARIUM.

551. Area circuli maximi est factum ex
peripheria ejus in 4tam diametri partem (§.
432.). Ergo quadruplum hujus circuli est
factum ex tota diametro in peripheriam (§.
97. Arithm.). Superficies itaque sphæræ
habetur, si peripheria per diametrum multi-
plicetur; consequenter superficies sphæræ
æqualis est rectangulo, cujus basis periphe-
ria circuli radii sphæræ descripti, altitudo
diameter sphæræ (§. 362.).

Tab: XV.

Fig: 198.

PROBLEMA VIII.

552. Data diametro sphæra invenire su-
perficiem ac soliditatem ejus.

Tab: XV.

Fig: 170.

RESOLUTIO.

I. Quærat peripheria circuli radio sphæ-
ræ describendi (§. 432.).

II. Inventa ducatur in diametrum. Fa-
ctum est superficies sphæræ. (§. 551.).

III. Si porro factum hoc live superficies
sphæræ multiplicetur per sextam diametri
partem, prodibit soliditas sphæræ (§. 546,
543.).

Ex. gr. Sit diameter 5600, erit periphe-
ria circuli 17584, adeoque superficies spha-
ræ

$$r = 17584: 5600 = 98470400'''$$

Quodsi verò $98470400'''$ multiplicetur ite-
rum per diametrum, & factum per 6 divi-

datur; quotus erit $91905706'''^2$ Soliditas
sphaera. $3'''$

Aliter.

Tab. XV.
Fig. 170.

I. Quærat^{ur} cubus diametri 175616000
(§. 529.).

II. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubus

inventum $175616000'''$ numerus 4tus propor-

tionalis $91905706'''^2$ (§. 276. Arithm.)

qui erit soliditas sphaeræ (§. 549.).

SCHOLIUM.

553. Segmenta sphaera ac sectores facili-
us inveniri in analysi docebimus.

PROBLEMA IX.

554. Metiri soliditatem ac superficiem
corporum regularum.

RESOLUTIO.

Cubi soliditas invenitur per §. 537. Tri-
angulædri cum sit pyramis, & Octaëdri
pyramis geminata, Icosaëdri ex viginti
py-

pyramidibus triangularibus, Dodecædrium
 ex dodecim quinquangularibus constet, qua-
 rum bases in superficie Icosædri & Dodecæ-
 dri sunt, vertex verò in centro cõeunt (§.
 521.); horum corporum soliditas habet-
 ur per §. 495. Superficies autem eorum
 item prodit, si area figuræ unius, quâ termi-
 nantur, quærat (S. 379, 398.), & inven-
 iatur per eum numerum, à quo corpus denomi-
 natur, multiplicetur; nempe pro Tetraëdro
 per 4, pro hexaëdro per 6, pro octaëdro per
 8, pro dodecædro per 12, pro icosædro per
 20 (§. 521.).

PROBLEMA X.

555. Corporis irregularis cujuscunque Tab. XV.
 soliditatem invenire. Fig. 192.

RESOLUTIO.

I. Immitatur corpus parallelepipedo cavo,
 eiquè aqua aut arena superfundatur, & alti-
 tudo aquæ seu arenæ AB notetur.

II. Corpore extracto, observetur denuo
 aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC; i-
 ta innotescit BC (§. 90. Arithm.).

III. Quoniam corpus irregulare æquatur
 parallelepipedo DFCGEB, mensuretur ejus
 longitudo FC & latitudo CG atque altitudo
 BC, soliditasque per §. 534. inveniatur.

Sit ex. gr. $AB 8$, $AC 5$, erit $BC 3$. Sit por-

ro $CF 12$, $CG 4$; erit soliditas corporis 144.

R

556.

SCHOLIION.

556. Quod si corpus in ejusmodi vas co-
mode deponi nequeat, ex. gr. si statua im-
bilis mensuranda esset; parallelepipedo,
primæ quadrangulæ circumdari debet.

COROLLARIUM.

557. Inveniri ergo potest, quot linearum
cubicarum sit aliquod lignum, saxum,
tallum, aut massa quæcunque pendens libra
unam. Hinc componi potest tabula gra-
tatis diversorum corporum secundum libra-
quas pendit pes cubicus corporum.

Quod per praxes hydrostaticas
adhuc modis fieri potest: quemadmodum
loco docebitur.

PROBLEMA XI.

558. Invenire soliditatem corporis cu-

RESOLUTIO.

1mo. Si corpus cavum in numero geo-
metricorum corporum non est, resolutio eadem
quæ problematis præcedentis.

2do. Quod si verò fuerit parallelepipedum,
Prisma, Cylindrus &c. non solum soliditas
sed superficies quoque inveniri potest, si

3. Soliditas & superficies totius corporis
cavitate inclusa, dein soliditas & superficies
cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram
habet per hypoth: inveniatur per §§. 530.

537, 538, 543, 552. &

II.

2. Soliditas & superficies cavitatis à soliditate & superficie totius corporis subtrahatur.

Sit ex. gr. soliditas Cylandri cavi ABCD conveniendas sitque diameter totius corporis

Tab: XV. Fig: 193.

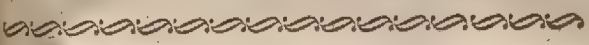
AB 56, longitudo AC 2 4 6; erit soliditas

Cylindri inclusa cavitate 605 592 960. Sit

diameter cavitatis 500, erit soliditas 482

75 000, quæ ex supra inventa subducta re-

linquit soliditatem corporis cavi 122 817 960.



CAPUT III.

DE RATIONE SOLIDORUM ET STEREOMETRIA DOLIORUM.

THEOREMA X.

559. Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero equalia & similia existunt. R2 DE 200.

Tab: XV. Fig: 199.

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantia concurrunt oriuntur, si plana terminantia sint & numero æqualia & similia, corpora eodem modo determinabuntur (§. 107.); itaque & ipsa corpora similia (§. 108, 156).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

560. Cum in planis similibus anguli homologii sint æquales & latera homologa proportionalia (§. 153.), quæ in solidis sunt æquales atque altitudines, corpora similia componuntur ex planis numero æqualibus & similibus (§. 559.), in eorum similibus anguli homologii sunt æquales (§. 495, 496.), & altitudines altitudinibus atque longitudinibus sunt proportionales.

COROLLARIUM II.

561. Quoniam corpora regularia planis regularibus, adeoque similibus (§. 94, 156.) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 507, 521.) terminantur; corpora quævis regularia ejusdem speciei, cubi, cet. cubis, tetraëdra tetraëdris &c. similia sunt (§. 559.).

THEOREMA XI.

Tab. XIV.
Fig. 168.
169.

562. Cylindrorum & Conorum similibus altitudines sunt ut radii basium; axes eorum sunt, ut radii basium; & Axes cum radii basium eundem angulum efficiunt.

DEMONSTRATIO.

minantia
nantia
corpora
07.)
08, 156

I. Siquidem Coni & Cylindri non possunt
tingvi, nisi per rationem axis CF vel KL
diametrum basis DE vel NM, atque an-
gulum CFE, vel KLM (§. 510, 513.); si co-
& Cylindri similes sunt, & axes eorum ad
metros basium eandem rationem habent,
cum radiis basium eundem angulum effi-
ciunt (§. 21, 132. *Arithm.*). Q. e. unum.

ologat
s sunt
ra ver
ero ter
corpora
quales
inibus
gitudi
s.

II. Cum in figuris solidis, perinde ac in pla-
tis altitudo sit recta ex vertice in basim ad
angulos rectos ducta (§. 197.); in Conis &
Cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 510,
513.), adeoque per demonstrata, altitudines
conis rectis & Cylindris diametris basium
sunt proportionales (§. 142. *Arithm.*). Et
quidem si Coni & Cylindri secantur juxta
metros AB, CD, EF, altitudines DG, BH
in \triangle rectiangularis subtendunt eisdem an-
gulos F & D, sive σ & μ (§. 202. , sub qui-
bus scilicet axes ad diametros inclinantur,
deo axibus (§. 230, 218. *Geometr.* 142.
Arithm.); consequenter diametris seu radi-
is basium proportionales sunt (§. 141, 157.
Arithm.). Q. e. alterum.

Tab: XV.
Fig: 189.

ria ph
94, 153
o acc
corpo
cubi
ce. simi

THEOREMA XII.

I. 563. Omnis sphaera est alteri similis.

DEMONSTRATIO.

simili
ces etia
in rad

Omnis semicirculus est alteri similis (§.
18.), consequenter cum omnis sphaera de-
scriba-

scribatur semicirculo (§. 516.); omnis sphaera est alteri similis (§. 156.). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

564. *Omnia Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 534, 537, 538, 543.); ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 135. *Arithm.*).

COROLLARIUM I.

565. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum; si altitudines, basium rationem habent (§. 155. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

566. Cylindrorum & Conorum bases sunt ut quadrata radii circuli (§. 510, 513.). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 408.). Ergo Cylindri & Coni omnes sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 164.); quod si fuerint ejusdem altitudinis; sunt ut quadrata diametrorum.

COROLLARIUM III.

567. Quare si in Cylindris altitudo fuerit eadem, sunt ut quadrata diametrorum.

metre basium æqualis; erunt in ratione
multiplicata diametrorum basium (§. 135. Ar.).

PROBLEMA XII.

568. Virgam pithometricam construere, Tab: XV.
quæ ope invenitur numerus mensurarum flu- Fig: 194.
aliquis ex vini carevisia eg. in vase cy-
lindrico contenti.

O.

RESOLUTIO.

I. Diameter AB vasis cylindrici ABDE
est mensuræ æqualis, quæ ad fluida mensu-
randa utimur, jungatur lineæ indefinitæ 17
ad angulos rectos (§. 216.).

II. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ
AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quo 1 du-
as mensuras capit, sed eandem cum vase pri-
ori altitudinem habet.

III. Fiat A2 = B1; erit B2 diameter va-
sis, quod tres mensuras capit, sed eju-
dem altitudinis cum vase ABDE, quod u-
nam tantum mensuram capit. Eodem mo-
do inveniuntur diametri reliqui A3, A4,
A5, A6, A7 &c. quatuor, quinque, sex &c.
mensuras capientes.

IV. In unum virgæ latus transferantur di- Tab: XV.
visiones inventæ A1, A2, A3, A4, &c. in al- Fig: 195.
terum verò latus altitudo cylindri CD uni
mensuræ æqualis, quoties fieri potest.
Ita factum est, quod è, f.

III.

DEMONSTRATIO.

Cylindri ejusdem altitudinis sunt inter se
R4. ut

Tab: XV. ut quadrata diametrorum (§. 166.). Ergo
 Fig: 194. quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor
 195. &c. mensuras capientis, est duplum, triplum
 quadruplum &c. quadrati diametri vasis me-
 suram unam tantum capientis (§. 417.).
 Quare si inde radices extrahantur, erunt
 A₂, A₃ &c. diametri ipsi (§. 227. *Arithm.*).
 idque A₁ diameter unam, A₂ duas, A₃ tres,
 A₄ quatuor, A₅ diameter vasis quinque me-
 suras capientis. Quod si itaque has divi-
 nes ad Cylindrici vasis diametrum applica-
 constabit, quot diametri AB unius mensura
 ABDE in Cylindri majoris diametro con-
 neantur.

Jam si porro ope alterius divisionis in al-
 tero virgæ latere factæ longitudinem vasis
 Cylindrici investiges, apparebit, quoties
 titudo CD minoris Cylindri in altitudine ma-
 joris reperiatur (§. 86. *Arithm.*). Quia
 si in virga adnotatus numerus diametrorum
 multiplicetur per numerum altitudinum, pro-
 dabit numerus mensurarum cavitatem Cylindri
 adimplentium; Q. e. d.

S C H O L I O N.

569. Ex. gr. Sit diameter AB vasis Cy-
 lindrici S, altitudo EF 12; erit numerus me-
 surarum, quas capit, 96.

Hinc etiam apparet Cylindrorum men-
 suram constitui Cylindrum, quemadmodum et
 solidorum ceterorum cubum. Unde &c. n. g. a
 pithometrica sic constructa Virga Cylindrica
 appellatur. Similiter hic circularum me-
 sura constituitur circulus, sicuti omnium
 persficierum mensura quadratum. • SCHO-

SCHOLIION II.

570. Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri AB pro mensuris integris, earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius mensuræ 1, seu 1000 partium decimalium; erit ejus quadratum 1000000; cujus pars decima 10000. Inde extracta radix quadrata 0. 316 sunt partes decimales diametri unius mensuræ, quæ respondent diametro Cylindri decimam mensuræ partem continentis, ejusdem tamen cum Cylindro integro $ABDE$ altitudinis. Si ex duplo hujus decimæ, scilicet 20000, radix extrahatur, prodit diameter basis duas decimas unius mensuræ $ABDE$ continentis 0. 447, & ita porro. Et hoc quidem est initium; quodsi vero quadrato diametri unius mensuræ 1000000 addas partem decimam 10000, & ex summa extrahas radicem quadratam 1. 049; erit ea diameter

vasis, quæ capit — mensuræ &c. &c. hoc est,

si itidem ipsi 1000000 addas duas decimas 20000, & ex summa radicem extrahas 1.

095, erit ea diameter vasis, quæ capit 1 —

mensuræ. Ratio patet per demonstr: Probl: præced. Ut igitur intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales, sequens Tabula inservit.

Dia-

Diametri pro mensuris integris, & earum partibus decimalibus.

0.1	0.316	3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
2	447	1	1.761	1	2.469	1	3.016
3	548	2	1.788	2	2.488	2	3.033
4	632	3	1.816	3	2.519	3	3.049
5	707	4	1.844	4	2.529	4	3.066
6	775	5	1.871	5	2.549	5	3.082
7	837	6	1.897	6	2.569	6	3.098
8	894	7	1.923	7	2.588	7	3.114
9	949	8	1.949	8	2.607	8	3.130
		9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.375
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.390
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.405
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

PROBLEMA XIII.

571. *Invenire soliditatem dolii, hoc est determinare numerum mensurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

I. Conveniente latere virgæ pythometri-
cæ metire longitudinem Dolii AC, & latere
altero diametros AB & GH.

II. Cum per experientiam dolum habea-
tur pro Cylindro, cujus basis est circulus me-
dius æquidifferens inter circulos AB & GH,
inter diametros AB & GH quæratür nume-
rus medius æquidifferens (§. 299. *Arith.*),
qui *diameter æquata* dici solet.

III. Diameter ergo æquata multiplicetur
per longitudinem dolii AC; Factum est nu-
merus mensurarum, quas capit dolum (§.
568, 569.).

$$\text{Ex. gr. Sit } \begin{array}{l} AB = 8 \\ GH = 12 \end{array}$$

$$\hline \text{Summa} = 20$$

$$\begin{array}{l} \text{Semisumma} = 10 \text{ Diam: æquata} \\ AC = 15 \end{array}$$

$$\hline \text{Capacitas doli} = 150 \text{ Mensurarum.}$$

SCHOLIUM.

572. Si ABDE sit multipulum aliarum or-
dinariè mensurarum, tabula inservit omni-
bus molis etiam maximæ doliis. Sit eg. AB
DE triplum ordinariæ mensuræ, tum capaci-
tas

Tab: XV.
Fig: 194.

tas dolii inventa per tria multiplicanda in exemplo scilicet nostro dolium mensuras ordinarias caperet 450. Dolii non pleni iuxta longitudinem jacentis modus mensurandi accuratè desideratur adhuc, quòd si erigatur, per problema præsens eodem modò invenitur.

S C H O L I O N II.

573. Alii Dolium ex duobus conis truncatis constare existimantes, in soliditatem ejus per §. 544 inquireunt. R. P. CLAVIUS S. J. alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto sphæroidis Archimedæe habet. WALISIUS ea pro frusto fusi parabolici habet. Enimverò cum methòlus proposita praxi satis respondeat, reliquæ verò ut ex profundiori geometria derivatæ, molestiores sint, illa contenti esse possimus nequidquam ultra etiam de virga cubica addituri.

T H E O R E M A XIV.

Tab. XV.
Fig. 197.

574. Sphæra sunt ut cubi diametrorum.

D E M O N S T R A T I O.

Tab. I.
Fig. 8.

Si semicirculi C & c cum dimidiis quadratis sibi circumscriptis circa diametros suos revolvantur, describentur & sphærae & Cylindri (§. 510, 516.); idque similes (§. 156.); erit ergo Cylindrus ad Cylindrum, ut sphæra ad sphæram (§. 126. Arithm.), sed ejusmodi Cylindrus ad Cylindrum est ut cubus diametri ad cubum diametri (§. 567.);

ergo

ergo etiam sphaerae in eadem ratione existunt
(§. 126. *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA XV.

575. *Cylindrus, cujus altitudo aequalis est diametro baseos, est ad cubum diametri ut 785 ad 1000.*

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. Tab: XV, 432.). Quia vero altitudo DC \equiv AB per Fig: 194. n. I. hypoth: Soliditas Cylindri erit 785000 (§. 538.); cubi autem AB 1000000 (§. 529.). Ergo Cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 155. *Arithm.*). Q. e. d.

THEOREMA XVI.

576. *Æqualia Parallelepipedæ, Prismata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora sint æqualia, facta ex basibus in altitudinem sunt æqualia (§. 534.) &c. Ergo bases & altitudines reciprocant (§. 271. *Arithm.*).

COROLLARIUM.

577. Facile igitur unum in aliud alterius basis vel altitudinis transformatur (§. 378.).

PRO-

PROBLEMA XIV.

578 Invenire cubum dato corpori æquali, vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione eg. ut 3. ad 1.

RESOLUTIO.

I. Inveniatyr soliditas corporis per Problemata cap: præced: tradita.

II. Ex ea vel ejus submultiplo aut multiplo ex. gr. triplo extrahatur radix cubica (§. 254. *Arithm.*); quæ erit latus cubi defiderati (§. 529, *Geom.* 220. *Arithm.*).

Ex. gr. Sit soliditas Cylindri 107

875, reperietur latus cubi 475.

PROBLEMA XV.

579. Corpora geometrica quacunque alia æqualia diversi generis transformantur in data basi vel altitudine.

RESOLUTIO.

I. Si detur basis, soliditas corporis dividetur per eam; quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & Cylindris, (§. 534. 537, 538 & 184. *Arithm.*), tertia verò pars in pyramidibus atque conis (§. 543. *Geom.* & §. cit: *Arithm.*). Q. e. d.

II. Si altitudo detur, soliditas corporis dividatur vel [per eam totam, ut habeatur basis

sis prismatum, parallelopipedorum & cylindrorum: *vel per 3tiam ejusdem partem*, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. cit:).

III. Inventa aut data area baseos *imò* disceperatur in factores duos, ut habeatur latitudo & longitudo basis in parallelepipedis, prismatis triangularibus, & multangularibus (§. 374, 379, 398, 503, 508.). *addo*. Pro parallelepipedi itaque basi factorum alter pro longitudine, pro altitudine alter assumendus (§. 362.). Pro prismatico verò triangulari unus præterea per 2 multiplicandus (§. 379.). Pro multangulari demum prismatico unus factorum per dimidium numerum laterum dividendus; ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 398.).

IV. Pro Cylindro & cono ex basi inventa quærenda porro ejus diameter (§. 437.).

Ex. gr. Sit soliditas alicujus corporis $\overset{\circ}{3}$
 $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$
 456 978. Inveniri debet Cylindrus, cujus
 $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$
 altitudo 2 4 6. Reperietur basis $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$
 $\overset{\circ}{1}$ $\overset{\circ}{1}$
 ferme; diameter 134.

S C H O L I O N.

586. Quodsi dentur bases & altitudines corporum, soliditas ut præterea detur, opus non est, si geometrica constructione utamur. Id quod exemplo uno alterove illustrare lubet. Sit prisma triangulare BAD transfor-

Tab: XIV.
Fig: 166.

mandum in parallelepipedum; *basis* BAC convertatur in *rectangulum* (§. 380.), deinde
 Tab: XIV. duo *rectangula* ejusmodi sibi addantur; (§. 381.)
 Fig: 167. 394, 536.), proque *basi* $NLIQ$ ponantur, *altitudo* verò *prismatis* CD sit *altitudo* IK .
 Erit parallelepipedum $LKON$ æquale *prismati* BAD (§. 534, 537.).

Similiter si parallelepipedum $LKPN$ in *Cylindrum* $ABED$ commutandum; mutetur *basis*
 Tab: XIV. $NLIK$ in *circulum* DFE per §. 438, & *altitudo* IK fiat æqualis CF . Erit parallelepipedum æquale *Cylindro* (§. 534, 539.).

Tab: XIV. Jam verò si parallelepipedum commutandum
 Fig: 169. in *conum* NKM , vel *bases* parallelepipedum $NLIQ$ triplum pro *basi* *coni* NLM sub *altitudine* $KL = IK$ ponendum, vel è *conulo* sub *eadem* *basi* *altitudo* *Coni* KL tripla *spatiæ* *altitudinis* IK assumenda (§. 543, 536.).

THEOREMA XVII.

581. Corpora similia, *Prismata*, *Parallelepipeda*, *Cylindri*, *Pyramides* atque *Coni* sunt in *ratione* triplicata *homologorum* *laterum*, itemque *altitudinum*,

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in *ratione* composita *basium* & *altitudinum* (§. 564.), sed *bases* sunt in *ratione* duplicata *homologorum* *laterum* (§. 400, 408.), & *altitudines* *lateribus* *basium* *homologis* *proportionales* sunt (§. 560.) ergo corpora ipsa in *ratione* triplicata *laterum* *homologorum*, itemque *altitudinum* sunt (§. 135. Ar.). Q. e. d.

PRO.

PROBLEMA XVI.

382. *Augere, vel minuere corpora geometrica in ratione data, quæ sint similia datis.*

RESOLUTIO.

I. Pro cubis & sphaeris inter latus aut diametrum sphaeræ & ejus multipulum vel submultipulum inveniantur duæ mediæ continuæ proportionales (§. 314.), & super prima inventa media proportionali describantur corpora (§. 524.).

II. Pro Conis & Cylindris idem fiat inter basis diametrum & ejus multipulum vel submultipulum, inter altitudinem & ejus itidem multipulum vel submultipulum.

III. Pro reliquis demum corporibus inter altitudinem & longitudinem basium, inter corporum quoque altitudinem, atque earundem multipla vel submultipla dictæ duæ mediæ continuæ proportionales quærendæ &c.

DEMONSTRATIO.

Siquidem corpora augenda similia datis per *hypotheses* esse debeant, erit cubus A ad cubum B, aut quæcunque alia corpora in ratione triplicata quorumcunque laterum mn & xz (§. 581.); sed cum rectæ quatuor proportionales continuæ ponantur per *construict*: est etiam mn ad TR in ratione triplicata eandem mn & xz (§. 190. *Arithm.*), consequenter $A : B = mn : TR$ (§. 141. *Ar.*).

S

Si

Tab: XV.
Fig: 199.

Si igitur $TR : mn = 3 : 1$ vel 3 ad 8, erit
etiam $B : A = 3 : 1$ vel 3 ad 8 (§. 126. Ar.)
Q. e. d.

S C H O L I O N.

583. Per hoc Problema in Circinis portionum pro augendis solidis, quibusque, & in Regula Calibræ pro augendis globis tormentariis (Calibra est diameter globi tormentarii vel ipsius tormenti paulò minor) exdividitur recta linea in partes ejusmodi, ut una sit æqualis diametro globi, pars vero reliqua sunt ad primam, ut diameter globorum duarum trium &c. librarum diametrum globi libe unius.

Tab. XV. In exemplo assumpto si diameter spha
Fig. 200. Sive globi effet TR & globi S diameter
 XZ , globusque S appenderet libras 120; globus S eadem libras 40 contineret.

Finis Elementorum Geometriæ

D. O. M. H.

XXX

†††††

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ

PRÆFATIO.

OMENTI perquam exigui tyro-
 nibus videtur Trigonometria, uti-
 litatis prorsus nullius. Enimvero rerum
 Mathematicarum periti ore unanimi con-
 titentur, quod, sublata Trigonometria, ma-
 xima eorum pars pereat, quæ in Mathefi
 admiramur. Certè stellarum magnitudi-
 nem, distantiam à terra, motum, Eclipsi-
 um tam solarium, quam lunarium compu-
 tum, magnitudinem Globi terraquei; & in-
 numera alia prorsus ignoraremus, si no-
 bilissimæ hujus scientiæ auxilio destitue-
 remur. Trigonometria igitur pro arte ha-
 beri debet, quâ maximè abscondita & à
 S2 cogni-

gognitione hominum remota in apricum
producuntur.

Eam qui nescit, non magnos in Mathesi
mixta sentiet progressus: sæpius ipsi in
Philosophia naturali hærebit aqua, ex.g.
Iridis phænomena ad rationes suas revo-
catur, aliæque meteora emphatica expli-
catur. Studium igitur Trigonometriæ
addiscendæ afferatur indefessum, nec im-
patiens sit mora, donec in partibus Ma-
theseos subsequenter inestimabilis ejusdem
usus ex his ipsis etiam Elementis pateat.
Fides oculata impedit, quominus in pe-
sterum judicia de rerum usu (quod vul-
go plerumque fieri solet) præcipitemus.
Paucis Problematibus comprehendendi, quæ
alias per casus plures distribuuntur.
Elementis enim præter necessitatem mul-
tiplicanda non sunt, quæ spinosa videntur
tyronibus, nec culpatur brevitæ, quæ per
spicuitati non officit, memoriæ levamen-
tissimum existit. Cumque Trigonome-
tria etiam in Geometria practica usum
habeat, quam cum Theoretica conjungere
consultum duximus; ideo hunc usum
finem annectere placuit.

ELE

E L E M E N T A
 TRIGONOMETRIÆ
 P L A N Æ

CAPUT I.

DE CONSTRUCTIONE CANO-
 NIS SINUUM, TANGENTIUM,
 ATQUE SECANTIUM, TAM NA-
 TURALIUM, QUAM ARTIFI-
 CIALIUM.

DEFINITIO I.

I.

Trigonometria plana est scientia
 ex tribus trianguli rectilinei par-
 tibus inveniendi reliquas

S3

Ex.

Tab: Trig. Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC
 Fig: 1. atque angulo B inveniantur anguli reliqui
 & C cum latere tertio BC .

DEFINITIO II.

Tab: Trig. 2. Sinus rectus AD arcus AE vel AI et
 Fig: 2. chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB di-
 stantia. Sinus totus est radius HC seu sinus
 quadrantis HE . Sinus versus est pars radii
 ED inter sinum rectum AD & arcum AB
 intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpe-
 dicularis (§. 272. *Geom.*); consequenter
 sinus omnes eidem radio insistentes inter
 paralleli (§. 217. *Geom.*).

COROLLARIUM II.

Tab: Trig. 4. Quoniam arcus AE est mensura anguli
 Fig: 2. ACE , & arcus AI mensura anguli contigui
 ACI , sinus autem est chordæ dictorum arcuum
 dimidium (§. 2.), duo anguli deinceps
 positi ACE & ACI eundem sinum AD re-
 ctum, & ED versum habent.

COROLLARIUM III.

5. Cum HE utpote quadrans sit mensura
 anguli recti (§. 125. *Geom.*), erit HC sinus
 totus sinus anguli recti (§. 2.). Angulorum
 acutæ obtusorum sinus iidem sunt, quos ha-
 bent complementa ad duos rectos (§. 126. *Geom.*).

DEFINITIO III.

6. *Tangens* arcus EA est portio rectæ tangentis circum EF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *secans* ejusdem arcus.

Tab: Trig.
Fig: 2.

COROLLARIUM.

7. Est etiam FE tangens, & FC secans angulorum ACE, & ACI (§. 48. Geom.). Duo igitur anguli deinceps positi eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

8. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tangens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG sinus arcus AH dicitur *cosinus* arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes*, atque *Secantes Complementi*.

Tab: Trig.
Fig: 2.

THEOREMA I.

9. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 271. Geom.). Sed Sinus sunt chordarum dimidia (§. 2.); ergo & hi ad radios eandem rationem habent (§. 163. Arithm.). Q. e. d.

S4

HY.

HYPOTHESIS.

10. Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum tangentium atque secantium, tam cuilibet gradui usque ad 90, quam etiam cuilibet minuto primo usque ad 60 respondentium.

SCHOLION.

II. Ex PTOLEMÆI Almagesto discimus Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, 3tia &c. hoc est per fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in *Analyti* triangulorum utebantur.

Dimidiis chordis, seu sinibus, primum ut sunt, quantum constat, Saraceni. In tabulis Sinuum & Tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & intra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. IO. tamen REGIOMONTANUS, NICOL. COPERNICUS, RHETICUS, VALENT. OTHO, qui tabulas istas construxerunt, ad fractiones multò minores istis descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis agnobilis. RHETICUS ut haberet sinus ad radium 10000000000, assumpsit radium 100000, 00000, 00000, & à sinibus per hunc reperiens præscidit 5 notas primas. Quò artificioso obtinetur ut nota residua omnes vera existant, ac proinde sinus ita reperi d veri neque ultima integra parte radii deficiant.

Et ta
bus.

NEP

comm

thmos

totius

logari

tange

rum le

nores.

nus &

tem

atque

die op

men

lateat

um in

12.

circul

tendat

quale

totus

ejus d

50000

13.

R

Sit

Et

Et tales sunt sinus omnes in tabulis vulgari-
bus. Logarithmi quoque ad hos numeros à
NEPERO, BBRIGGIO & VLACCO ac-
commodati. NEPERUS, qui primus Logari-
thmos in Trigonometriam introduxit, sinus
totius logarithmum facit 0. Hinc crescunt
logarithmi sinuum, sinibus decrecentibus, &
tangentialium atque secantium sinu toto mayo-
rum logarithmi sunt defectivi, seu nihil mi-
nores. Dicuntur quoque hi logarithmi Si-
nus & tangentes artificiales. Quamvis au-
tem Canon sive tabula sinuum tangentialium
atque secantium quibus tamen postremis ho-
die opus non habemus, constructa sint, ne ta-
men artificium condendi Canonis ejusmodi
lateat, præcipui modi inveniendorum sinu-
um indicandi. Itaque

COROLLARIUM.

12. Cum latus hexagoni regularis sextam
circuli partem sive arcum 30 graduum sub-
tendat (§. 92, 323. Geom.) atque radio æ-
quale sit (§. 337. Geom.), siquidem sinus
totus sive radius est 1000000 (§. 11.), erit
ejus dimidium, sive sinus graduum 30 =
500000 (§. 2.).

PROBLEMA I.

13. Invenire Sinum 45 graduum.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Sit HI circuli quadrans; erit HI angulus
rectus

Tab: Trig.
Fig. 2.

rectus (§. 125. *Geom.*), consequenter HI

$\text{---} \text{HC} + \text{CI} \text{---} \text{ (§. 415. Geom.) } \text{---} 2 \text{HC}$
 (§. 32. 353. *Geom.*). Quare cum HC fi-
 nus totus (§. 2.) sit 10000000 (§. 11.);

ex 2. HC 20000000000000 extrahatur
 radix 14142136 (§. 213. *Arithm.*); prodibit
 chorda HI (§. 218. *Arithm.*), ejus dimidi-
 um 7071068 finus 45 graduum, desideratus.
Q. e. i. Et d.

PROBLEMA II.

Tab: Trig.
Fig: 2.

14. Dato sinu AD invenire cosinum AG.

RESOLUTIO.

Quia AG = DC (§. 3. & 217. 196. *Geom.*).

I. Ex quadrato radii AC subtrahatur qua-
 dratum finus AD, relinquetur quadratum co-
 finus AG (§. 115. *Geom.*). Unde fit

II. Radix quadrata extrahatur, prodibit co-
 finus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000;
 reperietur AG 8660254, finus 60 gr.

COROLLARIUM.

15. Cosinu AG vel DC subtracto ex sinu
 toto EC vel AC, remanet sinus versus ED.

PROBLEMA III.

16. Dato sinu AD invenire sinum arcus AE Tab: Trig.
dimidii AE . Fig: 2.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§. 427. Geom.).
Hujus dimidium est ejus sinus (§. 2.).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl:
preced: inveniatur arcus dimidii AE sinus,
sive $15\text{ gr} = 2588190$.

PROBLEMA IV.

17. Dato sinu DG arcus DF ; invenire si-
num DE arcus dupli DB . Tab: Trig.
Fig: 3.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3.) &
angulus B utrique Δ lo BCG & BDE com-
munis; erit $BC:CG = BD:DE$ (§. 230.
Geom.). Quare cum CG inveniri possit dato si-
nu DG (§. 14.), & BD sit duplum ipsius DG
(§. 2.); inveniatur quoque DE (§. 276.
Arithm.). Q. & f. & d.

SCHOLIUM.

18. His atque aliis modis sinus singulo-
rum graduum & minutorum usque ad qua-
drantem, tot enim sufficiunt (§. 4.); reperti
sunt. URSINUS * docet, quomodo ex sinu
omnium primi, ex. gr. unius secundi per so-
lam quasi additionem & subtractionem totus
Canon componatur. Facilius inveniuntur
tangentes.

* Trig on: l. 2. c. 5. p. 164.

tangentes & secantes; quemadmodum ex problemate sequente patebit. Sinuum, Tangentium atque Secantium Canon junctus simul, Canon triangulorum naturalis dici solet, quia triangulorum Analyfi inservit.

PROBLEMA V.

Tab: Trig.
Fig: 2.

19. Dato sinu AD arcus AE invenire tangentem EF, & secantem FC ejusdem arcus.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3 & 289. Geom.), erit ille huic parallelus (§. 217. Geom.). Quare ut Cofinus DC ad sinum AD, ita Sinus totus EC ad tangentem EF: item ut cofinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 230. Geom.). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 276 Arithm.). Q. e. i. & d.

PROBLEMA VI.

20. Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eò accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 10,000,000,000 constructi. Resecantur verò sinus 4 notis ultimis in Canone PITISCI majora. Cum adeò sinus sint numeri 10 ut plurimum notarum, in Canone autem logarithmorum, qui

qui proffat, maximo numeri naturales sunt 5 tantum notarum, logarithmi eorum inveniuntur per Probl: 32 Arithm: §. 328. Utendum verò Canone Logar: majore.

Ex. gr. Sit inveniendus logarithmus finis gr. 23, qui apud Pitiscum est 3907311284. Resectis versus sinistram 5 notis 39073, ipsis respondens in Canone logarithmus est 4. 5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9. 5918768 (§. 327. Arith:). Differentia tabularis est 111. Quare inferitur ut 100000 ad 111, ita nota residua finis dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12; qui si addatur logarithmo 9. 5918768, prodit logarithmus quaesitus 9. 5918780; qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA VII.

21. Invenire logarithmum tangentis dato logarithmo finis & Cosinus.

Tab: Trig.
Fig. 2.

RESOLUTIO.

I. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.

II. A summa subtrahatur logarithm9 cosin9.

Residuum est logarithmus tangentis (§. 19, 342. Arithm:).

COROLLARIUM.

22. Quodsi detur sinus complementi; inveniatur logarithmus secantis, si imò logar: sinus totius multiplicetur per 2, & addo ab ejus duplo subtrahatur sinus complementi datus (§. 19 & 342. Ar:).

CA.

CAPUT II.

DE ANALYSI TRIANGULO.
RUM.

THEOREMA II.

Tab: Trig.
Fig: 223. *Tangens 45 EF æquatur radio EC.*

DEMONSTRATIO.

Arcus AE 45^o per hypoth: ergo & angulus ACE 45 gr (§. 49. Geom.); consequenter angulus F 45 gr. (§. 208. Geom.). Quare EF = CE (§. 161. Geom.). Q. e. d.

THEOREMA III.

Tab: Trig.
Fig: I.24. *In omni triangulo ABC latera sunt ut sinus angulorum sibi oppositorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 278. Geom.), erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 31. Geom.): consequenter latera dimidia sunt arcuum dimidiarum (§. 2.); cum verò arcus dimidii sint mensuræ angulorum oppositorum (§. 295. Geom.), erunt latera dimidia

media sinus angulorum sibi oppositorum (§. 2.). Ergo ut totum ad totum, ita dimidium ad dimidium; hoc est ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B, ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A; ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C (§. 145. Ar.).

Q. e. d.

PROBLEMA VIII.

25. *Datis duobus angulis A & C una Tab. Trig. cum latere AB uni eorum C opposito inveni- Fig. 2. re latus BC oppositum alteri angulo A.*

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 24.)

Ut sinus anguli C

Ad latus sibi oppositum datum AB

Ita sinus anguli alterius A

Ad latus quæsitum BC.

Invenietur adeo logarithmorum ope BC per §. 342. Arithm.

Ex. gr. Sit C 48 35, AB 74, A 57 28, calculus erit:

Logar: Sin: C	9.8750142
Log: AB	1.8692317
Log: Sin: A	9.9258681

Sum: Log: AB & Sin: A 11.7950998

Logar BC 1.9200857

Cui in Canone logarithmorum pro nume-

ris vulgaribus respondent 83. Cum vero lo-
ga-

garithmus in tabulis non exactus reperitur, inveniri possunt numeri inventi 83 fractiones decimales, hoc est in casu nostro digiti 8 linea, si sub characteristica 2 post 8300 denarii logarithmus ipsius BC evolvatur, cui proxime respondet numerus 8319.

Est ergo BC 8319 (§. 337. Arithm.). Quodsi fuerit characteristica 3, obtinebuntur fractiones decimales per §. 336. Arithm.

PROBLEMA IX.

Tab: Trig. 26. Datis duobus lateribus AB & BC una cum angulo C uni eorum opposito; invenire angulos reliquos A & B.

Fig: 1.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 24.)

Ut latus AB

Ad Sinum anguli sibi oppositi C;

Ita latus alterum BC

Ad Sinum anguli quaesiti sibi oppositi A

Ex. gr. Sit AB 94, BC 69, C 72 15

Log: AB 1.97312

Log: Sin: C 9.97887

Log: BC 1.83884

Sum: Log: Sin: C & BC 11.81766

Log: Sin: A 9.84458

Eni in Canone proxime respondent 44

Quod

Quodsi Canon major non fuerit ad manus,
prater scrupula prima etiam secunda de-
derentur, vi Probl: 34 Arithm: §. 336. hoc
modo inveniuntur.

logarithmo invento 9.8445387 subtrahe
abul: prox: min: 9.8445018

notetur Differen: ima 369
mil: ex prox: maj: 9.8446310 Subduc
prox: min: 9.8445018

notetur Differ: ada 1292
Inferatur, 1292: 60 = 369
2) 646: 30 = 369: 17

Est ergo angulus A = 44 21 17
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 116 36 17

Quon: A + C + B = 179 59 60 (§.
207. Geom.).

erit B = 63 23 43 (§.
212. Geom.).

Similiter dentur in triangulo rectangulo Tab: Trig.
prater rectum A, hypothenusa BC, & cathe- Fig: 4.

AC pro angulo B. Sit nempe BC 49,

C 36, Calculus erit:

Log: BC 1.6909661

Log: Sin: tot: 10.0000000

Log: AC 1.5563025

T

Log:

Log: Sin: B 9.8661064, cui

Canone proxime respondent 47 16.

Ergo C 42 44 (S. 208. Geom.).

Tab: Trig.
Fig: 6.

add. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quod situs angulus & obtusus esse potest G, & acutus B (S. 204.), adeoque constare debet utrum triangulum datum sit obtusangulum an acutangulum. In casu itaque priorum omnia fiunt ut num. 1. Postquam verò inventa fuerit ang: acutus, sumitur complementum eius ad 180 grad: pro obtuso.

Tab: Trig.
Fig: 6.

Ex. gr. Sit in Δ lo obtusang: AGC, Cui in

349, AC 382, ang: C 57 25; erit

Log: AG 2.5428254

Log: Sin: C 9.9256261

Log: AC 2.5820634

Sum: Log: C & AC 12.5076895

Logar: Sin: G 9.9648641,

Cui in Canone proxime respondent 67 15

Estigitur angulus acut: G in Δ AEG 67 15 quem si subtraxeris ex 180 gr. remaneat pro obtuso AGC 112 gr. 45 min.

Tab: Trig.
Fig: 6.

3tid. Quodsi angulus datus G in Δ AG fuerit obtusus, & datis præterea crura AG

4. *en* AG & AC, quærat^{ur} acutus; in solutione pro
 6. obtusi anguli AGC sumitur deinceps po-
 6. acuti anguli AGE sinus.

Ex. gr. Sit angulus obtusus G $165^{\circ} 17'$,

lato angulo G 179° ; AC 223 , & quærat^{ur} acutus C,

Log: AC 2.3483049

Log: Sin: AGE 9.4049009

Log: AG 2.2528530

Sum: Log: Sin: G & AG 11.6577539 .

Log: Sin: C. 9.3094490 .

Cui in Canone respondent quam proximè

AGC, 46° min.

LEMMA.

254 27. Si à semisumma duarum quantitatum
 261 abrahatur semidifferentia, relinquitur quan-
 634 titas minor; si vero illi hæc addatur, prodit
 895 quantitas major.

DEMONSTRATIO.

0 Numerus major componitur ex minore &
 67 15 differentia (§. 56. Arithm.). Ergo summa
 0 ex minore bis sumpto & differentia, conse-
 7 67 15 quenter semisumma ex minore & semidifferen-
 remanet tia. Quare si à semisumma semidifferentia
 abrahatur, minor quantitas relinquitur (§.
 56. Arithm.). Q. e. unum.

in Δ C Quod si vero semisumma & semidifferentia
 ea crurum addatur, aggregatum erit compositum ex

T2 quan-

quantitate minore & differentiali (§. 53. *arithm.*), adeoque numerus major per
monstr: Q. e. alterum.

PROBLEMA X.

Tab: Trig.
Fig: 4.

28. Datis duobus lateribus BA & cum angulo intercepto A; invenire angulos reliquos.

RESOLUTIO.

Imò. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumpto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 6, & 289. *Geom.*); feratur ergo

Ut crus unum AB

Ad alterum AC

Ita sinus totus

An tangentem anguli B.

Ex. gr. Sit BA 79, AC 54; erit

Log: BA 1.8976271

Log: AC 1.7323938

Log: Sin: tot: 10.0000000

Log: tang: B 9.8347667

in Canone respondent 34 gr. 21 min. angulus C 55 gr. 39 min (§. 208. *Geom.*)

Tab: Trig.
Fig: 7.

29. Si angulus A fuerit obliquus;

I. Inferatur

Ut summa laterum datorum AB & AC

differentiam eorundem,

Ita tangens semisummae angulorum quorum torum C & B

§. 53. Ad tangentem semidifferentiæ eorundem.
 II. Addatur semidifferentia ad semisum-
 mam; aggregatum erit angulus major C.
 Eadem semidif: à semisumma subtrahatur, re-
 liquus fiet angulus minor B.

Ex. gr. Sit $AB \overset{1}{75}$, $AC \overset{1}{58}$, $A \overset{0}{108} \overset{1}{24}$, erit

$$\begin{array}{r} AB \overset{1}{75}, AB \overset{1}{75}, A + B + C \overset{0}{179} \overset{1}{60} \\ AC \overset{1}{58}, AC \overset{1}{58}. \quad A \overset{0}{108} \overset{1}{24} \end{array}$$

$$\text{Sum: } 133. \text{ Dif: } 17 \quad B + C \overset{1}{71} \overset{36}{36}$$

$$\begin{array}{r} \text{---} (B + C) \overset{0}{35} \overset{48}{48} \\ \text{---} \end{array}$$

$$\text{Log: } AB + AC \quad 2.1238516$$

$$\text{Log: } AB - AC \quad 1.2304489$$

$$\text{Log: tang: } \frac{1}{2} (B + C). \quad 9.8580694$$

$$\text{Sum: Logar:} \quad 11.0885183$$

$$\text{Logar: tang: } \frac{1}{2} (C - B), 8.9646667, \text{ cui} \\ \text{tabulis proximè respondent } \overset{0}{5} \overset{1}{16}.$$

$$(B + C) = \overset{0}{35} \overset{1}{48}, \frac{1}{2} (B + C) = \overset{0}{35} \overset{1}{48}$$

$$(C - B) = \overset{0}{5} \overset{1}{16}, \frac{1}{2} (C - B) = \overset{0}{5} \overset{1}{16}$$

T₃

C

$$C = 41^{\circ} 4' \quad B = 30^{\circ}$$

DEMONSTRATIO.

Tab: Trig.
Fig: 7.

Crure majore dato AB ex vertice anguli
dati A describatur circulus (§. 116. *Geom.*)
& crux minus AC utrinque continuetur,
nec circulo in E & D occurrat. Erit
AE = AB = AD (§. 33. *Geom.*)
summa laterum datorum, CD differentia
rundem. Quoniam DE diameter (§.
Geom.); erit EBD semicirculus (§.
Geom.); consequenter angulus EBD rectus
(§. 298. *Geom.*), adeoque EB ad BD recta
perpendicularis (§. 67. *Geom.*). Quare
sumatur pro sinu toto; erit EB tangens
anguli EDB (§. 6, & 289. *Geom.*). Er
ro 0 = x + y (§. 206. *Geom.*), & inde

$$u = \frac{1}{2} 0 \quad (\S. 294. \text{Geom.}), u = \frac{1}{2}$$

y) (§. 84, 77. *Arithm.*); Ergo EB tangens
semisummæ angulorum quæditorum x & y
Quoniam x = u + n (§. 206. *Geom.*)
rit n semidifferentia angulorum x & y
27.). Sumpto itaque DB denuo pro radi
si describatur arcus DG (§. 116. *Geom.*)
in D erigatur perpendicularis DE (§.
Geom.), erit DF tangens anguli n (§.
289. *Geom.*), hoc est, semidifferentia
gulorum quæditorum x & y per dem
Jam cum anguli EBD & FDB sint recti
demonstr: & hinc FD & EB parallela

17. *Geom.*), ang: $BED = FDE$ (§. 202. *Geom.*); item $x = r$ (§. 140. *Geom.*); erit
 $CE: CD = EB: DF$ (§. 230. *Geom.*).
 Inventa itaque per tangentem angulorum
 quæstorum semidifferentia, reliqua in reso-
 lutione manifesta sunt per §. 27. *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

29. *Datis tribus lateribus AB, BC & C* Tab: Trig.
A invenire angulos A, B & C. Fig: 6.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

I. Ex vertice anguli A, latere minimo A
 B, describatur circulus (§. 116. *Geom.*); e-
 rit ob $AD = AB$ (§. 32. *Geom.*) CD sum-
 ma crurum AC & AB; CF verò differentia
 eorundem.

Et ideo inferre licet (§. 317. *Geometr.*)

ut basis BC

ad summam crurum CD;

ita differentia crurum CF

ad segmentum basis CG.

II. Inventum adeo segmentum CG (§.
 276. *Arithm.*) si subtrahatur à basi CB, re-
 linquitur chorda GB.

III. Demittatur ex A perpendicularis AE
 ad chordam GB (§. 187. *Geom.*), erit BE

$= EG = \frac{1}{2} GB$ (§. 272. *Geom.*). Da-

tis adeo in $\triangle rectang:$ AEB lateribus AB &
 BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; in-
 veniuntur anguli B atque C per §. 26.

T4

Ex.

Ex. gr. Sit AB 36, AC 45, BC 40.

$$\begin{array}{r} AC = 45 \\ AB = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AC = 45 \\ AB = 36 \end{array}$$

$$AC + AB = 81$$

$$FC = 9$$

$$\text{Log: } BC = 1.6020600$$

$$\text{Log: } AC + AB = 1.9084850$$

$$\text{Log: } FC = 0.9542425$$

$$\text{Summ: Log:} = 2.8627275$$

$$\text{Log: } CG = 1.2606675,$$

cui in Tabulis quàm proxime respondet

$18^{\circ} 2' 2''$ (§. 336. Arithm.).

$$BC = 4000$$

$$EG = 1000$$

$$CG = 1822$$

$$CG = 1822$$

$$BE = 2178$$

$$CE = 291$$

$$BG = 1089$$

$$\text{Log: } AB = 3.5563025$$

$$\text{Log: Sin: tot:} = 10.0000000$$

$$\text{Log: } EB = 3.0370279$$

$$\text{Log: Sin: EAB} = 9.4807254$$

cui in Tabulis quàm proxime respondet

$17^{\circ} 36'$, adeoque angulus ABE $72^{\circ} 24'$

(§. 208. Geom.).

$$\text{Log: } AC = 3.6532125$$

$$\text{Log: Sin: tot:} = 10.0000000$$

Log

Log: C

Logar

Tabulis

Ergo AC

57 54

DE

IN

30.

torium

eam pro

tensa an

i. Ex

Log: CE = 3.4640422

Logar: Sin: EAC = 9.8108297, cui in

Tabulis quàm proximè respondent 40° 18'.

Ergo ACE 49° 42' (§. 208. Geom:), & CAB

57° 54' (§. 85. Arithm:).

CAPUT III.

DE USU TRIGONOMETRIÆ PLANÆ IN GEOMETRIA PRACTICA.

PROBLEMA XII.

30. Construere instrumentum transportatorium rectilineum, hoc est, scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensa arcuum ad radium.

RESOLUTIO.

I. Ex communi Canone Sinuum fumantur Sinus

0 1000 1000 1000

Sinus arcuum 230, 5, 7 30, 10, 12 30 &c.
nempe in progressionē Arithmetica progre-
dientium, in qua terminorum differentia

I
— Eos multiplica per 2; erunt facta cho-
2
ræ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2.)
hic in tabella ponuntur.

G.	Chor: dimid.	Ch: int.	G.	Chor: dim.	Cho: inte.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

Tab. Trig. II. Ducatur recta AD, & ad eam erigatur
Fig. 8. perpendicularis AB (§. 216. Geom.) pro
arbitrio in 5, 10, viginti &c. partes æquales
dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus
dimidios, vel 4tas partes gradus &c. indi-
care debent subtensæ.

III. Per singula divisionum puncta ducatur
rectæ ipsi AD parallelæ (§. 219. Geom.)

IV. In lineam AD incipiendō semper
puncto

puncto
tegrarū
dentes
ntissim
verò fu
particul
10, 20,
metrica
tas, qua
dis dim
in scale
autem
fi mayo
ultimæ
loco 23
notas
do earū
rint.
V. 1
in 10, e
Cum
gradu
dus ar
erit cr
tensa

— A
I
— AB
5
Ar:).

31.
Geom.

puncto A transfer particulas chordarum integrarum gradib9 5, 15, 25, 35 &c. respondentes ex scala Geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 235. *Geom:*); in linea verò superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quod si scala Geometrica non contineat particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde est, ac si particulæ in scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto A reliquis separata, vel si major fuerit ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur. *Ex. gr. loco 258. 8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.*

V. Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15 &c.

Cum enim A5, B10 &c. sint chordæ 5, 10 graduum, & chordæ à quinis ad quinos gradus arcubus fere proportionaliter crescant; erit ci subtenfa arcûs unius gradûs, dz subtenfa 2 &c. graduum. Est enim AB: BC = A5: ci (§. 230. *Geom:*), sed BC =

$\frac{1}{5}$ AB, ergo etiam ci = $\frac{1}{5}$ A5 (§. 126. *Ar:*).

COROLLARIUM I.

31. Quia subtenfa 60 est radius (§. 337. *Geom:*), anguli quantitatem investigaturus puncto inter-

Tab. Trig.
Fig: 9.

Tab: III.
Fig: 44.

intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum BC, qui est mensura ipsius (§. 48. *Geom.*), & ejus chordam ad scalam applicet, quæ si ex. gr. ex. d in 12 pertingat, ostendit angulum DAE esse 12 graduum.

COROLLARIUM II.

Tab: Geom. 32. Angulus datæ quantitatis constructur, si radio B 60 describatur ex centro A arcus CB, & subtenſa gradus dati ex gr 12 in scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim arcus BC mensura anguli A (§. 48. *Geom.*), adeoque tot graduum, quot arcus continet (§. 49. *Geom.*).

SCHOLIUM.

33. Hujus instrumenti beneficio quantitates angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari experientia loquitur.

PROBLEMA XIII.

34. Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA & angulis o E y; invenire diagonales.

RESOLUTIO.

Tab: Trig. I. In $\triangle ABE$ datis duobus lateribus AB & AE, unâ cum angulo o invenitur primò angulus A (§. 26.), dein diagonalis BE (§. 25.).

II.

II. Eodem modo resolutio Δ lo BCD invenitur diagonalis BD. Q. e. f.

PROBLEMA XIV.

35. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus AB & BC una cum diagonalibus BE & BD, atque angulis o, x & y; invenire latera reliqua CD, DE & EA.* Tab: Trig. Fig: 10.

RESOLUTIO.

I. Datis in Δ ABE duobus lateribus AB & BE cum angulo intercepto o, invenitur unus angulus u (§. 28.), & deinde porro AE (§. 25.).

II. Eodem prorsus modo in Δ lis reliquis BED & BCD inveniuntur latera ED & DC. Q. e. f.

PROBLEMA XV.

36. *Datis in figura rectilinea omnibus lateribus AB, BC, CD, DE, EA, & tot angulis, quot sunt latera, demptis tribus, scilicet datis angulis C & D invenire diagonales BD & BE.* Tab: Trig. Fig: 11.

RESOLUTIO.

I. In Δ lo BCD, datis lateribus BC & CD cum angulo intercepto C, investigetur angulus m (§. 28.), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus n, atque porro invenitur diagonalis BD (§. 25.).

II. Datis jam in Δ lo BDE lateribus BD &

& DE cum angulo intercepto n, eodem prop.
sus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE.
Q. e. f.

PROBLEMA XVI.

Tab: Trig.

Fig: 11.

37. Datis in figura rectilinea latere AB una cum angulis o, x, y, e, u & n; invenire diagonales AC, AD, BD & BE una cum lateribus BC & AE.

RESOLUTIO.

I. Datis in $\triangle ABC$ angulis o & B = (e + u + n) una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 25.).

II. Similiter datis in $\triangle ABD$ angulis o + x & e + u una cum latere AB inveniuntur diagonales BD & AD (§. cit.).

III. Datis denique in $\triangle ABE$ angulis e & o + x + y una cum latere AB inveniuntur latus AE & diagonalis BE. Q. e. f.

SCHOLIUM II.

38. Cum Ichnographiæ arearum optimè perficiantur datis omnibus lateribus, itemque diagonalibus (§. 345. Geom.), horum Problematum in planimetria usus est insignis. Qui tamen praxi dant operam, molestias calculi fugiunt lucro magis quam accuratiori intenti.

PROBLEMA XVII.

Geometr:

Tab: III.

Fig: 42.

39. Metiri distantiam duorum locorum BA per eodem tertio c accessorum.

I. Inve
d arbitri
non recti

II. Dat
& Bc cui
primùm a
distantia

40. Ex

mata, qu
ria appli
bus exem

moda stat
dam adhu
e & Bc

curatè in
sed in me
is imis r

mus, cum
culo utam
ut distant

de quanti
dispicien
mus S

T

41. Si
titate ang
A & AC
arculi CI
tas ad L

ab error
mus totus
AB oppo

I. Inveniatur quantitas anguli c puncto c
ad arbitrium assumpto (§. 134. Geom:), nec
non rectarum Bc & Ac (§. 113. Geom:).
II. Datis in $\triangle BAc$ duobus lateribus Ac
& Bc cum angulo intercepto c, inveniatur
primum angulus A (§. 28.), & hinc porro
distantia AB (§. 25.). Q. e. f.

SCHOLI ON.

40. *Exempla non addimus, cum Proble-*
mata, quibus triangula in hac Trigonome-
tria applicatione solvuntur, jam in superiori-
bus exemplis sint illustrata, ut tamen de com-
moda stationis c electione judicari possit, qua-
dam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas
Ac & Bc, quæ sunt latera trianguli, satis ac-
curatè in campo metiri licet (§. 103. Geom:);
sed in metiendo angulo faciliè aliquot scrupu-
lis imis vel in excessu vel in defectu pecca-
mus, cum tamen hoc angulo erroneo in cal-
culo utamur tanquam vero, fieri non potest,
ut distantia vera obtineatur. Quamobrem
de quantitate erroris admittendi hic nobis
dispiciendum; de quo etiam in Geometria mo-
nimus §. 25.

THEOREMA IV.

41. Si error aliquot scrupulorum in quan-
titate anguli A admittatur, laterum verò B
A & AC magnitudo fuerit accurata, erit
arculi CD errorem CAD metientis quan-
titas ad DE differentiam distantia vera BC
ab erronea per calculum producta BD ut si-
nus totus ad sinum anguli BCA, qui lateri
AB opponitur. DE.

Tab: Trig.
Fig: 9.

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccatur, ut prodeat tantillô major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem *per hypo.* \triangle BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A intervallo AC tanquam radio arcus CD, qui per punctum D, ob AC = AD (§. 32. *Geom.*) necessario transit. Quoniam angulus CAD aliquot nonnisi scutpolorum est, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 48. *Geom.*) pro recta haberi, & si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§. 439. *Geom.*). Describatur similiter ex centro B intervallo BC arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque ob BC = BE (§. 32. *Geom.*) ED differentia inter distantiam veram BC & erroneam BD; anguli verò ACD, BCE & CED sunt recti (§. 290. *Geom.*); consequenter BCE = ACD (§. 127. *Geom.*), adeoque BCA = ECD (§. 81. *Arithm.*). Est verò ut sinus totus ad CD, ita sinus anguli ECD sive BCA *per demonstr.* ad ED (§. 24.); ergo etiam ut sinus totus ad sinum anguli BCA, ita CD ad ED (§. 148. *Arithm.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

Tab. Trig.
Fig. 9.

42. Eodem ergo manente errore CD in angulo A metiendo admissio, error in distantia admissus ED major est, si angulus BCA major fuerit; minor autem, si hic quoque minor fuerit (§. 180, 181. *Arithm.*). •

CO.

COROLLARIUM II.

43. Statio itaque in A ea eligenda, quæ aquam valde efficit angulum BCA (§. 42.); quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§. 207. *Geom.*) & latus AC > AB (§. 161. *Geom.*).

COROLLARIUM III.

44. Cum angulus BAD major sit angulo BMD (§. 168. *Geom.*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§. 42.).

SCHOLION.

45. Caterum hinc apparet praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxim Geometria accuratam expendi mereantur, ut ostenderemus theoriam accuratam parere praxim accuratam, & ad theoriam perfectè addiscendam excitemus, qui olim praxi operam sunt daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum deinceps observandas, ubi manum praxi admovebis. Etenim plerumque tantum confusè observantur; per theoriam verò accuratè determinantur. Id quod non minus theoria quam praxi CL. MARINONIUS rectè expressit versibus titulo libri sui inscriptis: Quum satis imbuerint docilem theorematum mentē, sponte sua manibus conciliatur opus.

U. PRO.

PROBLEMA XVIII.

Geom.
Tab: III.
Fig: 41.

46. Invenire distantiam duorum locorum *AB*, quorum unus *A* tantum accessibilis.

RESOLUTIO.

- I. Investigetur quantitas angulorum *A* & *C*, itemque rectæ *AC* (§. 134, 113. *Geom.*).
- II. Inveniatur *AB* (§. 25.).

THEOREMA III.

Tab: Trig.
Fig: 13.

47. Si in distantia *AB* ex duobus angulis *A* & *ACB* una cum latere *AC* investiganda nonnisi in angulo uno *ACB* metiendo aberratur; arcus *BE*, qui errorem in angulo *BCD* admissio metitur, erit ad *BD* differentiam inter distantiam veram *AB* & erroneam *AD*, ut sinus anguli tertii o distantia stationum *AC* oppositi ad sinum totum.

DEMONSTRATIO.

Describatur ex centro *C*, radiò *CB* arcus *BE*, qui est mensura erroris *BCD* (§. 48. *Geom.*), cumque nonnisi paucorum minutorum sit ex hypothesi, pro recta haberi potest. Quare cum anguli *BED* & *CBE* sint recti (§. 290. *Geom.*), erunt anguli *o* & *u* (§. 129. *Geom.*), itemque *u* & *x* æquales recto (§. 208.); consequenter $o + u = x + u$ (§. 127. *Geom.*), & hinc $y = x$ (§. 81. *Arithm.*). Est verò ut sinus anguli *x* five *o* (per demonstr.) ad arcum *BE*, ita sinus totus ad

ad BD (§. 24.). Ergo BE ad BD, ut sinus anguli o ad finum totum (§. 148. *Arith.*).
Q. e. d.

COROLLARIUM I.

48. Cum sinus anguli o majorem habeat rationem ad finum totum, si major, quam ubi minor fuerit (§. 178. *Arithm.*); eodem errore in angulo ACB admisso, hoc est arcu BE existente eodem, minor error erit in determinanda distantia BD, si angulus o major, quam ubi fuerit minor (§. 181. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

49. Siquidem angulorum obtusorum iidem sunt sinus, qui acutorum deinceps illis positum (§. 5.), maximus vero sinus fit anguli recti (§. 2.); statio in A & C talis eligenda est, ut angulus o evadat recto proximus, id quod obtinetur, si anguli A & C simul sumpti proxime rectum adæquent (§. 207. *Geom.*).

PROBLEMA XIX.

50. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum AB.* Tab: Trig.
Fig: 14.

RESOLUTIO.

I. Electis 3 stationibus D, C & E, mensurentur anguli ACB, D, E & BCE (§. 134 *Geom.*); itemque lineæ DC & CE (§. 113. *Geom.*).

U₂

II.

II. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180 gr. & relinquitur angulus ACD & CBE (§. 130, 212. *Geom.*), eodem modo inveniatur angulus DAC.

III. Inde inveniuntur latera AC & BC (§. 25.), & hinc porro angulus CAB (§. 28.), tandemque AB (§. 25.).

PROBLEMA XX.

Geometr.
Tab: VI.
Fig: 76.

51. *Invenire altitudinem accessibilem BC.*

RESOLUTIO

I. Statione in E electa, instrumento rite collocato (§. 248. *Geom.*) inveniatur angulus BEC (§. 134. *Geom.*), & distantia stationis eC (§. 113. *Geom.*), quæ erit ad CB perpendicularis (§. 197. *Geom.*).

II. Cum itaque C sit rectus (§. 67. *Geom.*), inveniatur BC (§. 25.), cui si addatur AC, prodibit integra AB. *Q. e. inv.*

THEOREMA IV.

Tab: Trig.
Fig: 13.

52. *Si in quantitate anguli A investiganda aberretur, erit altitudo vera BD ad falsam BC, ut tangens anguli veri DAB ad tangentem anguli erronei CAB.*

DEMONSTRATIO.

Assumpto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli

li CAB (§. 6.). Sunt itaque altitudines B
D & BC ut tangentes angulorum DAB &
BAC. *Q.e.d.*

COROLLARIUM I.

53. Quoniam manente angulo eodem ve-
ro & erroneo, eadem est ratio altitudinis
veræ cujuscunque ad erroneam (§. 52.);
error plurium erit pedum in altitudine ma-
jore, quam in minore (§. 276. *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

54. Quia tangentes arcuum angulo recto
vel minuto proximorum, hoc est arcuum
majorum & exiguorum minorē rationem in-
ter se habent, quam tangentes mediocrium,
seu semirecto proximorum arcuum (minore
scilicet tangente ad majorem relata) teste
Canone tangentium & §. 134, 198. *Arith*:
si idem error committitur in angulo majore
aut valde exiguo, & mediocri, error in alti-
tudine admissus major erit in casu priore,
quam in posteriore (§. 276. *Arithm.*).

SCHOLIUM.

55. Sit e.g. angulus verus BAD 30, AB Tab: Trig.
67, erit altitudo vera 38 6. Ponamus af- Fig: 13.
sumi angulum erroneum BAC 31, is produ-
cet altitudinem erroneam BC 40 2 (§. 25).
Sit

*Sit in distantia minore BE angulus DEB
 recto proximus 86, & assumatur per erro-
 rem angulus 87; reperietur altitudo erronea
 5.16, quæ erroneam supra inventam exce-
 dit 1.4.*

COROLLARIUM III.

56. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est, quam angulus DAB in distantia majore AB (§. 168. Geom.): in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB prope semirectus sit (§. 250. Geom.).

COROLLARIUM IV.

Tab: Trig.
 Fig: 5.

57. Si instrumenti latus non fuerit horizonti parallelum, sed ex. gr. quantitate anguli BAD versus horizontem inclinatum, si sumatur AB pro radio, erit CB tangens anguli veri CAB (§. 6.), & iterum si sumatur AD pro finu toto, erit CD tangens anguli CAD. Eadem ergo hic veritas pro differentia altitudinis veræ à falsâ eruitur, quæ §. 52. asserta est. Scilicet esset altitudo vera BC ad falsam CD, ut tangens anguli CAB ad tangentem erronei CAD. Item eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB à situ horizontali reclinetur.

Cæ-

Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ AC, quam AB commissum.

PROBLEMA XXI.

58. Metiri altitudinem inaccessam AB. Geom: r:

Tab: VI.

Fig: 77.

RESOLUTIO.

I. Eligantur duæ stationes E & G in eadem recta tanto intervallo se distantes, ut angulus eAf non sit nimis exiguus, nec altera statio nimis vicina altitudini AB (§. 54. 56.).

II. Inveniantur anguli AfC, AeC & CeB (§. 134. Geom:), itemque distantia se longitudo (§. 113. Geom:).

III. Datis in $\triangle Aef$ angulis e (§. 206. Geom:) f, itemque latere ef, inveniatur latus eA (§. 25.); deinde in $\triangle AeC$ datis angulis e & recto Catque latere Ae, inveniatur latus AC, itemque Ce (§. cit:); tandem ex cognitis in $\triangle CeB$ angulis recto C & e, atque latere Ce, inveniatur latus CB (§. cit:).

IV. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo AB (§. 85. Arithm:).

PROBLEMA XXII.

59. Invenire rationem diametri ad peripheriam. Tab: Trig.

Fig: 2.

RE-

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Siquidem radius circuli EC est 10000000 (§. 11.), erit sinus AD atque tangens EF arcus AE unius minuti $\frac{1}{60}$ 2909 (§. 18.); adeoque arcus AE aliquanto major, quam AD, & minor quam EF (§. 414. *Geom.*); itidem 2909 fere esse debet (§. 299. *Ar.*). Multiplicentur 2909 per 21600, hoc est per numerum minutorum in peripheria contentorum, productum 62834400 est peripheria circuli (§. 33. *Geom.*); est ergo diameter ad peripheriam ut 20000000 ad 62834400 fere (§. 126. *Ar.*); id est dividendo per 200000, ut 100 ad 314 (§. 157. *Arit.*); ea scilicet, quam etiam in Geometria §. 439 invenimus.

Q. e. i. Et d.

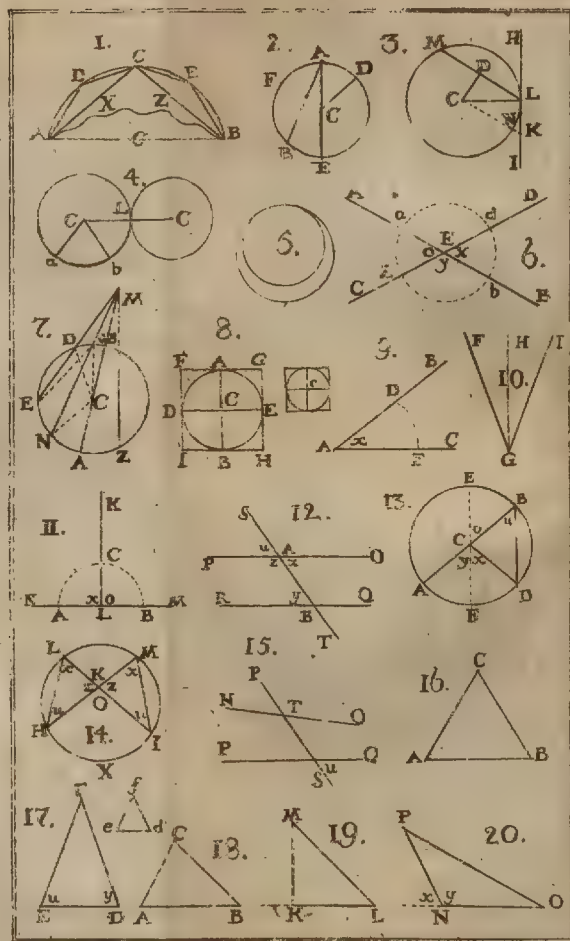
Finis Trigonometriæ
Planæ
D. O. M. G.



<i>Pagina</i>	<i>ERRATA GEOM:</i> <i>Linea</i>	<i>CORRIGE</i> <i>Lege</i>
3.	14. Limea	Linea
6.	12. Exfordiensi	oxfordiensi
12.	23. positus AGC	positus AEC
20.	21. basi KE	basi KL
29.	11. semicirc: dazb	semicirc: daz
42.	24. (§. 86.)	(§. 68.)
44.	8. (§. 57. Ar:)	(§. 75. Ar:)
47.	21. (§. 178.)	(§. 173.)
52.	23. (§. 27.)	(§. 127.)
55.	6. (§. 59.)	(§. 159.)
67.	1. simul sumptis bd	simul sumpti bd
91.	13 $\frac{a+b}{a+b}$	$\frac{a-b}{a-b}$
108.	17. IB+IC > GI+IB	IB+IC > GI+IC
121.	2. PAPIUS	PAPPUS
124.	23. Ducantur AD & DB	Ducantur AB & DB
147.	20. quadratulum	quadruplum
150.	22. tricæ, æquæ	tricæ, quæ
151.	27. $\frac{24}{24}$ 5 & $\frac{24}{24}$	$\frac{24}{24}$ 5 & $\frac{24}{24}$
153.	10. ponuntur 8	ponuntur 8
161.	4. si dimidium sumatur	si duplum sum: basis v. altitudinis parallelog:
172.	20. 4: 1. + erunt	4: 1, erunt
190.	18. diameter 56	diameter 56
	19. $\frac{56}{56}$ per: 17584	$\frac{56}{56}$ per: 17584
	20. $\frac{1}{4}$ diam: $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ diam: $\frac{1}{4}$

Pagina	ERRATA GEOM.	CORRIGE
	26. <i>Periph:</i> ^{CLII} 17584	<i>Periph:</i> ^{CLIII} 17584
191.	23. diam: 56	diam: 560
	24. ejus 3136	ejus 313600
192.	I. 1000: 3136	1000: 313600
194.	I. 18 84	18 84
250.	16. EC = CF	EC = EF
263.	20. capit $\frac{1}{10}$	capit $1 \frac{1}{10}$
271.	23. <i>per hypothesen</i>	<i>per hypothesin</i>
272.	15. & globi S	& globi s
	17. globus S	globus s
277.	27. (§. 163. <i>Arit:</i>)	(§. 159. <i>Arith:</i>)
285.	9. Tab: Trig: f. 2.	Tab: Trig: f. 1.

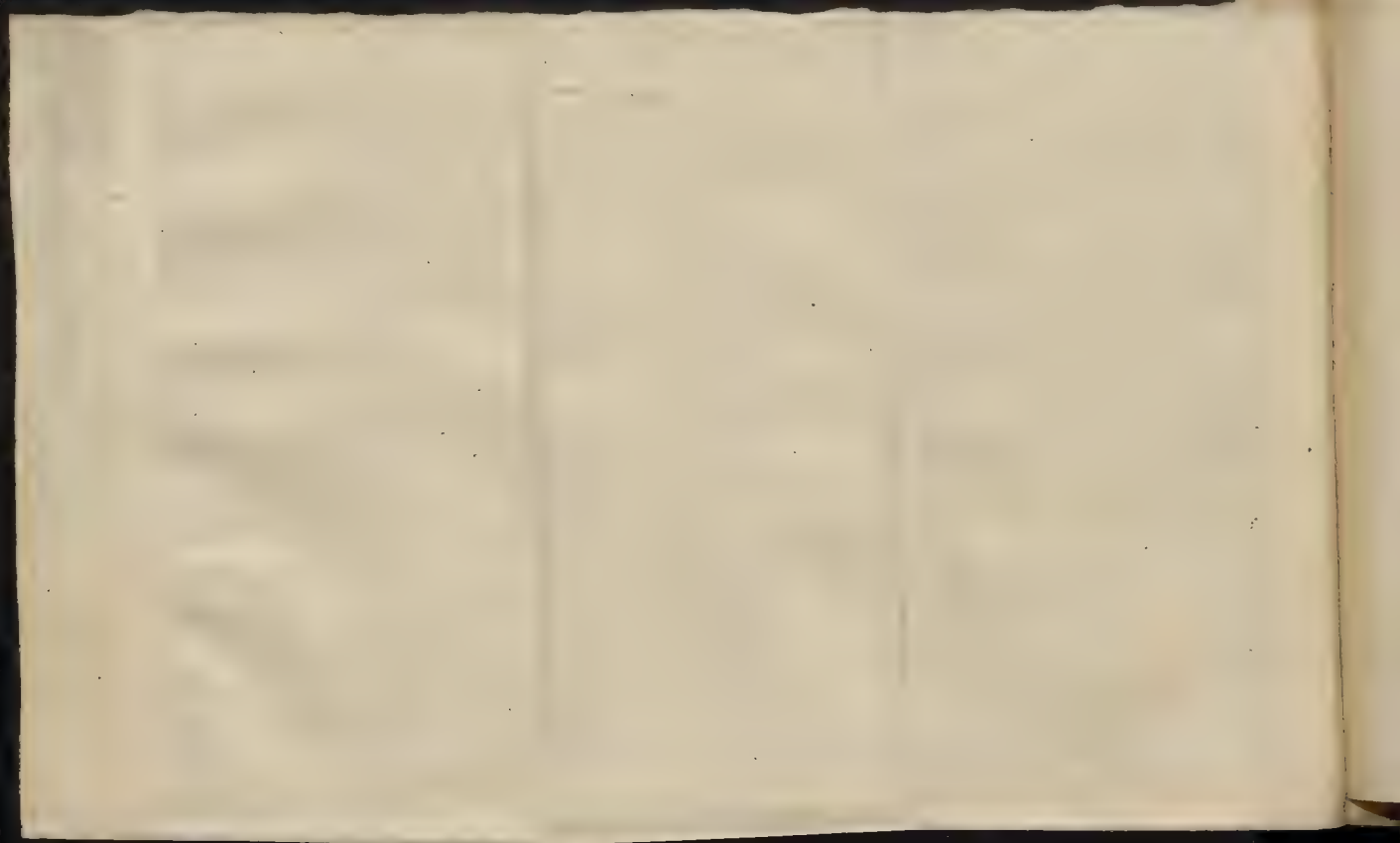


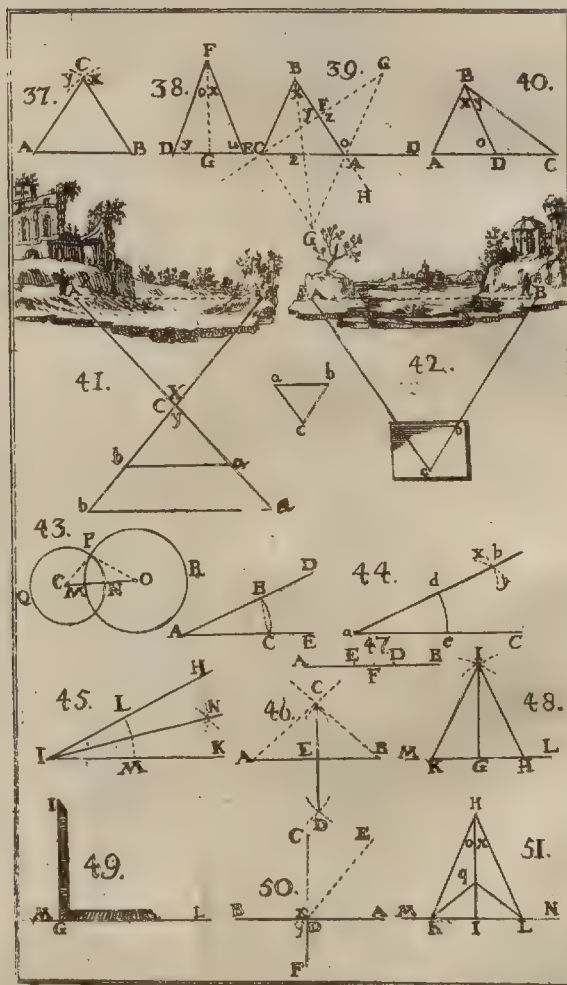


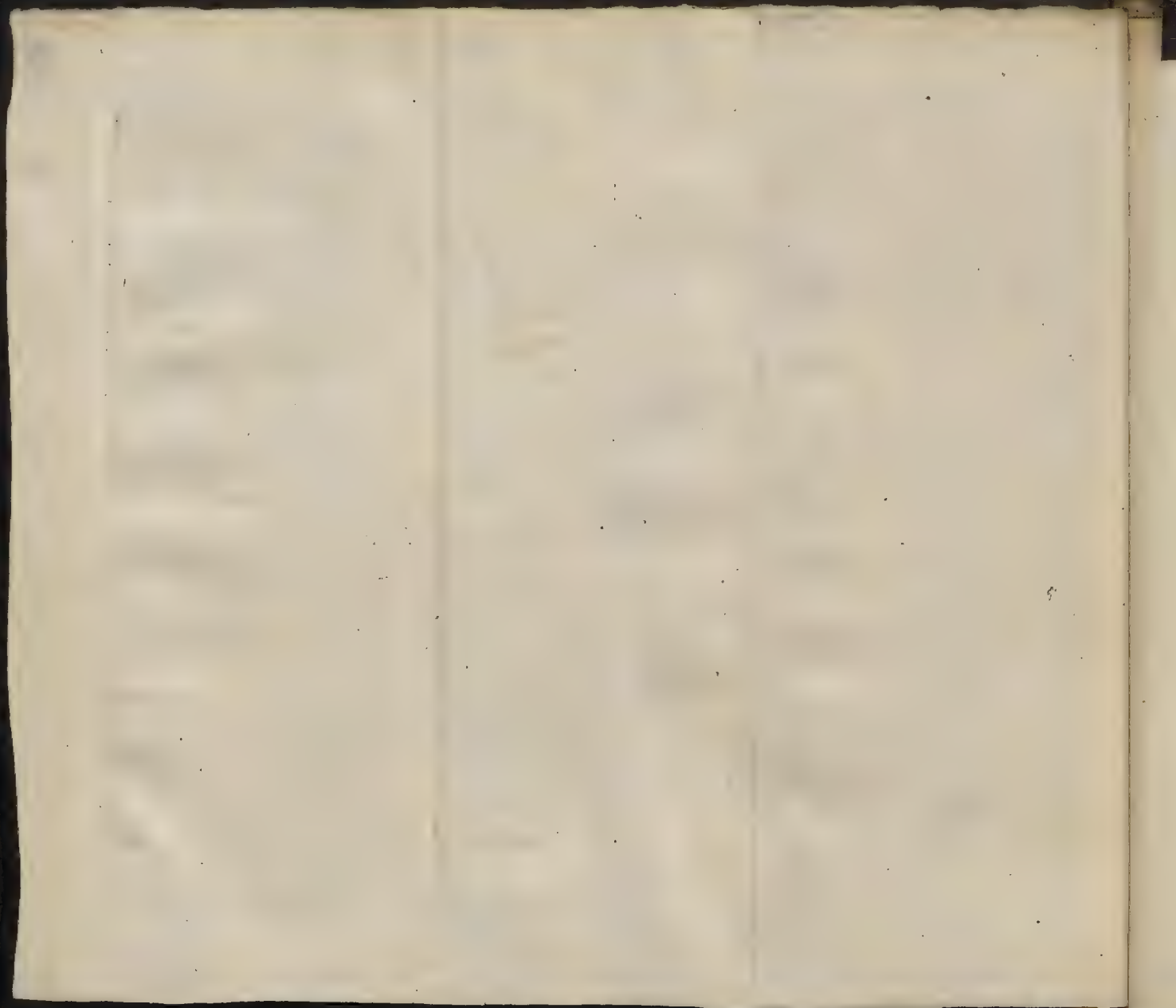
19. de Eggenfelder fecit Villaco.

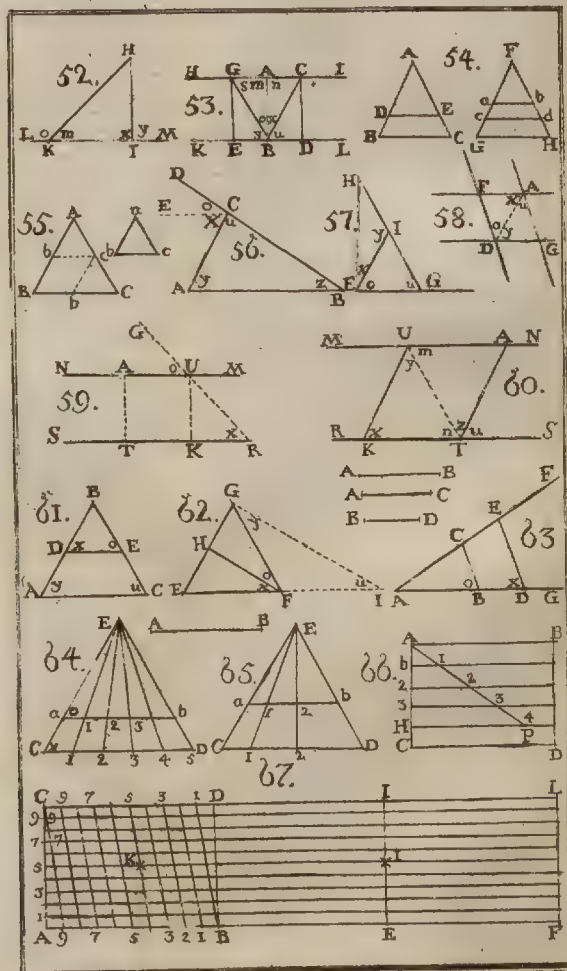
Geom. Tab. I.



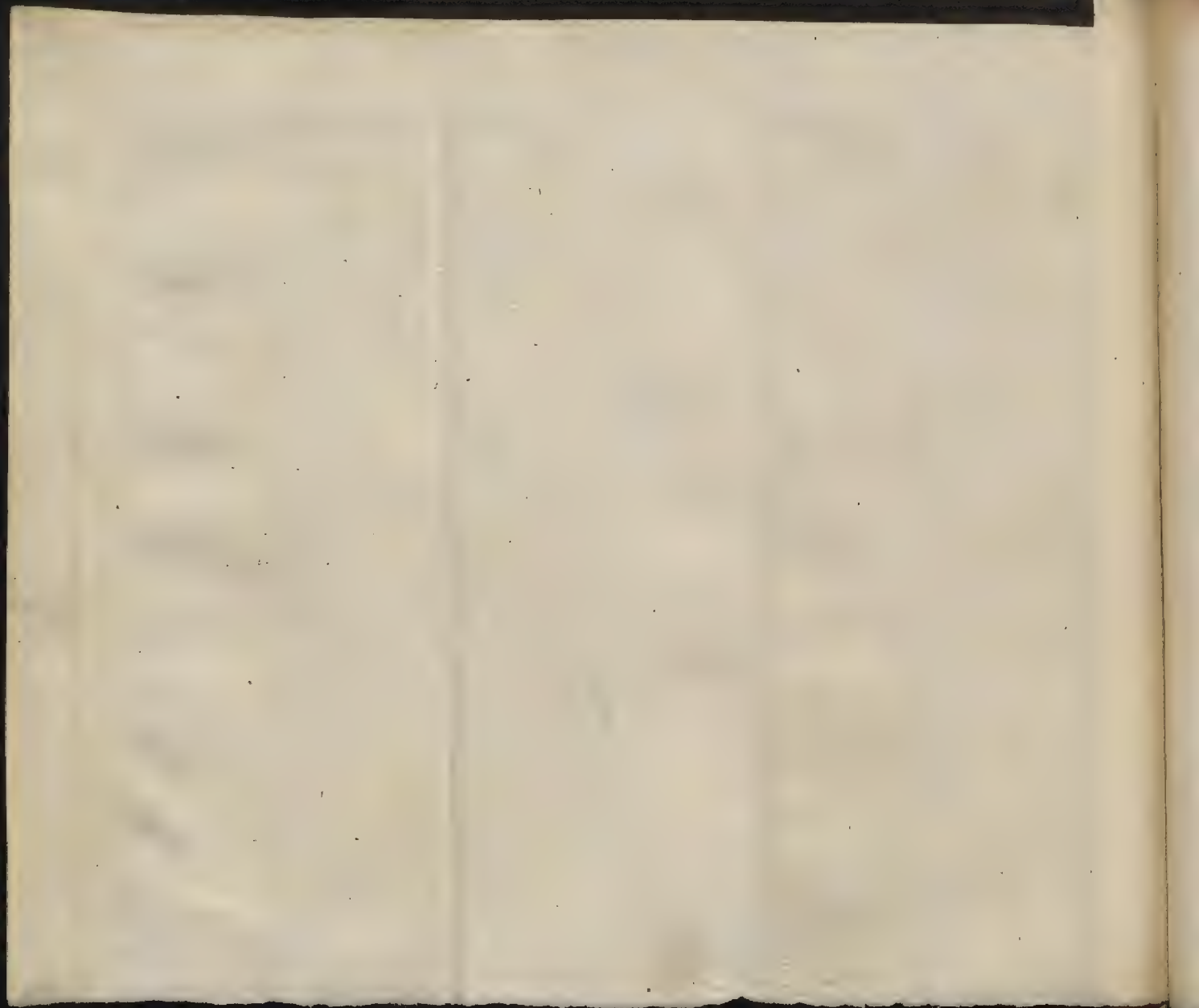


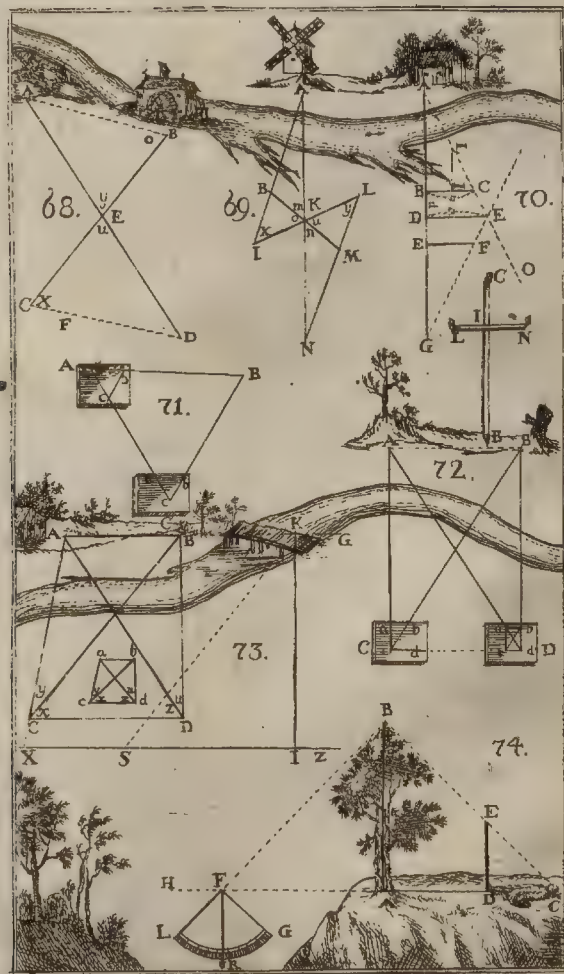






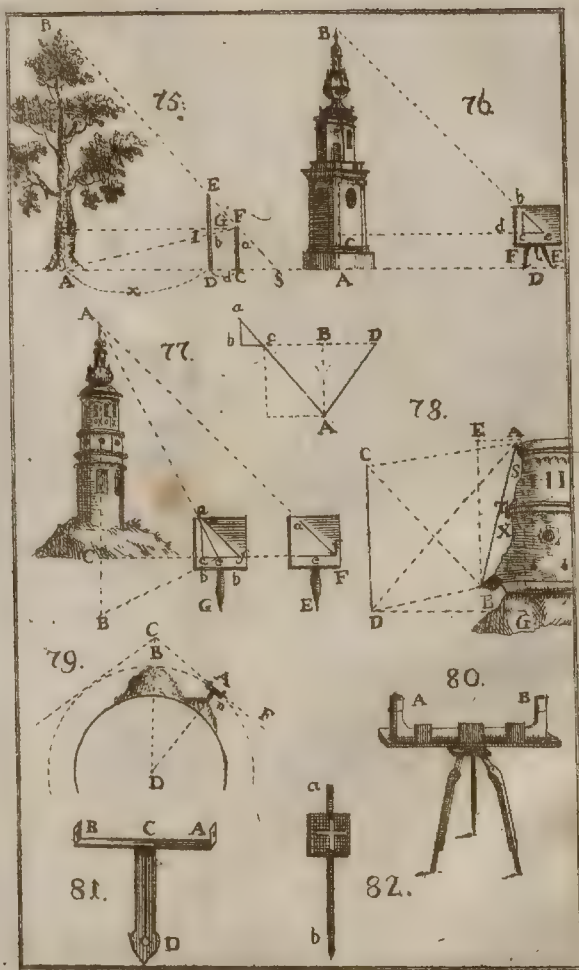
Geom.Tab.IV.





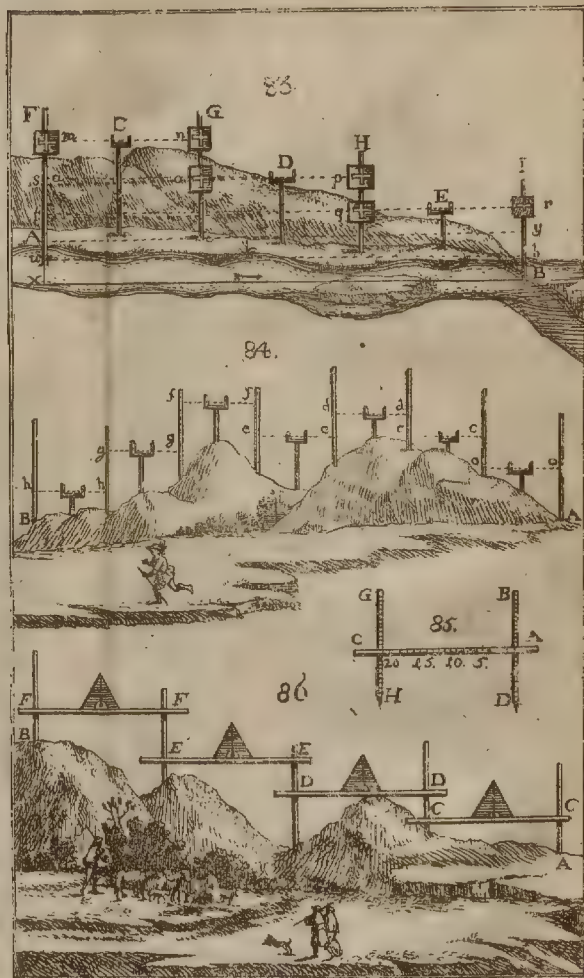
Geom. Tab.V.





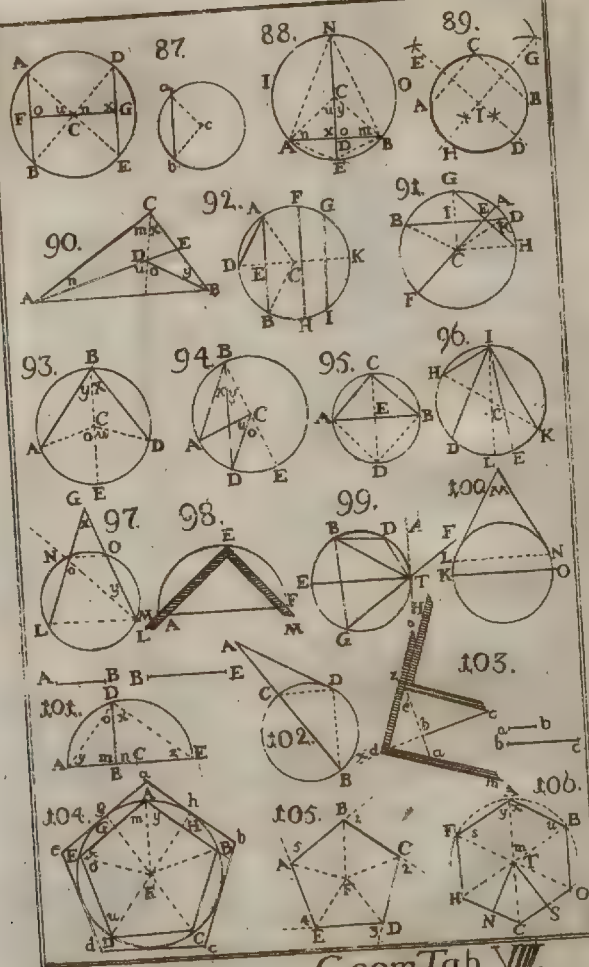
Geom. Tab. VI.



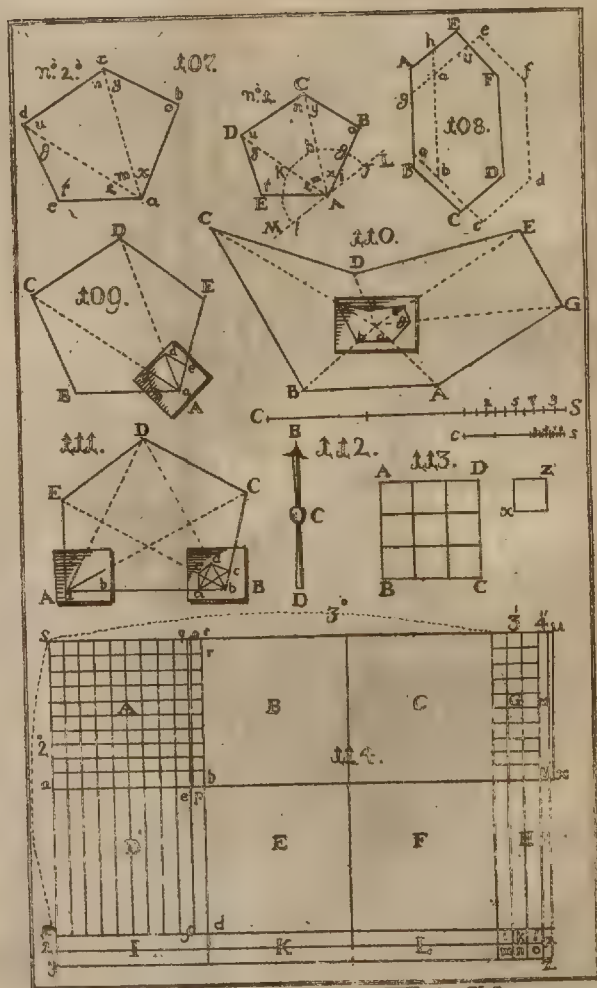


19. de eegenselder for Vindh. Geom. Tab. III.









Geom. Tab. IX.



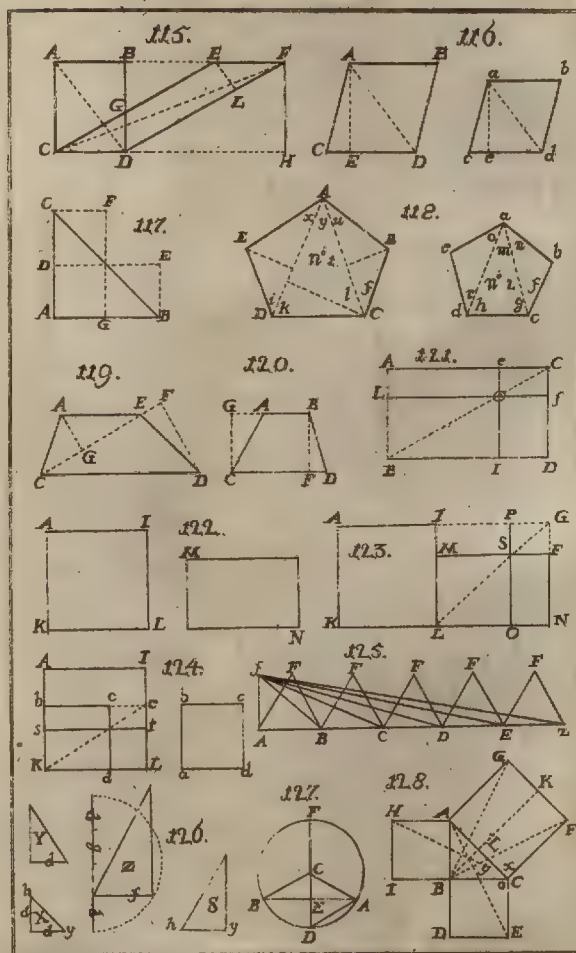
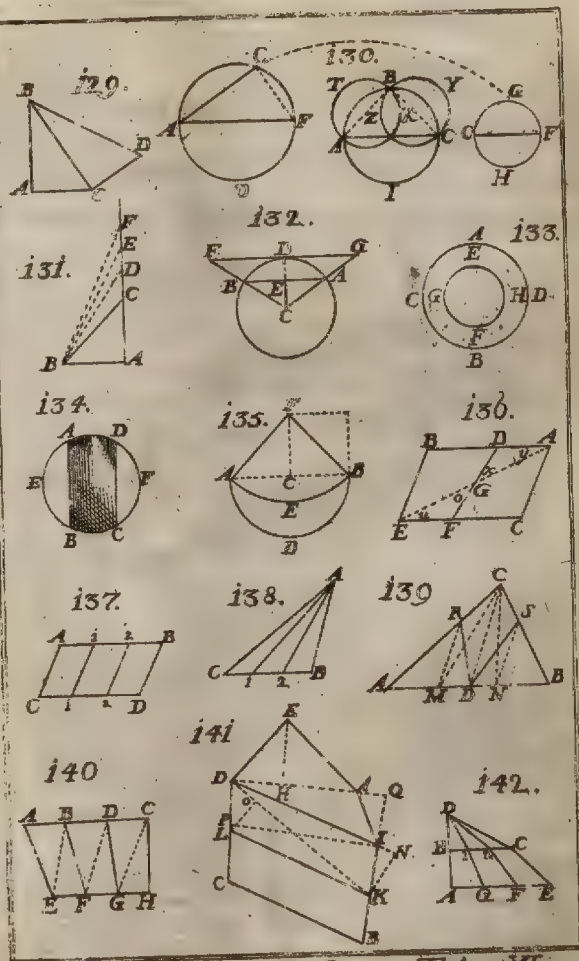


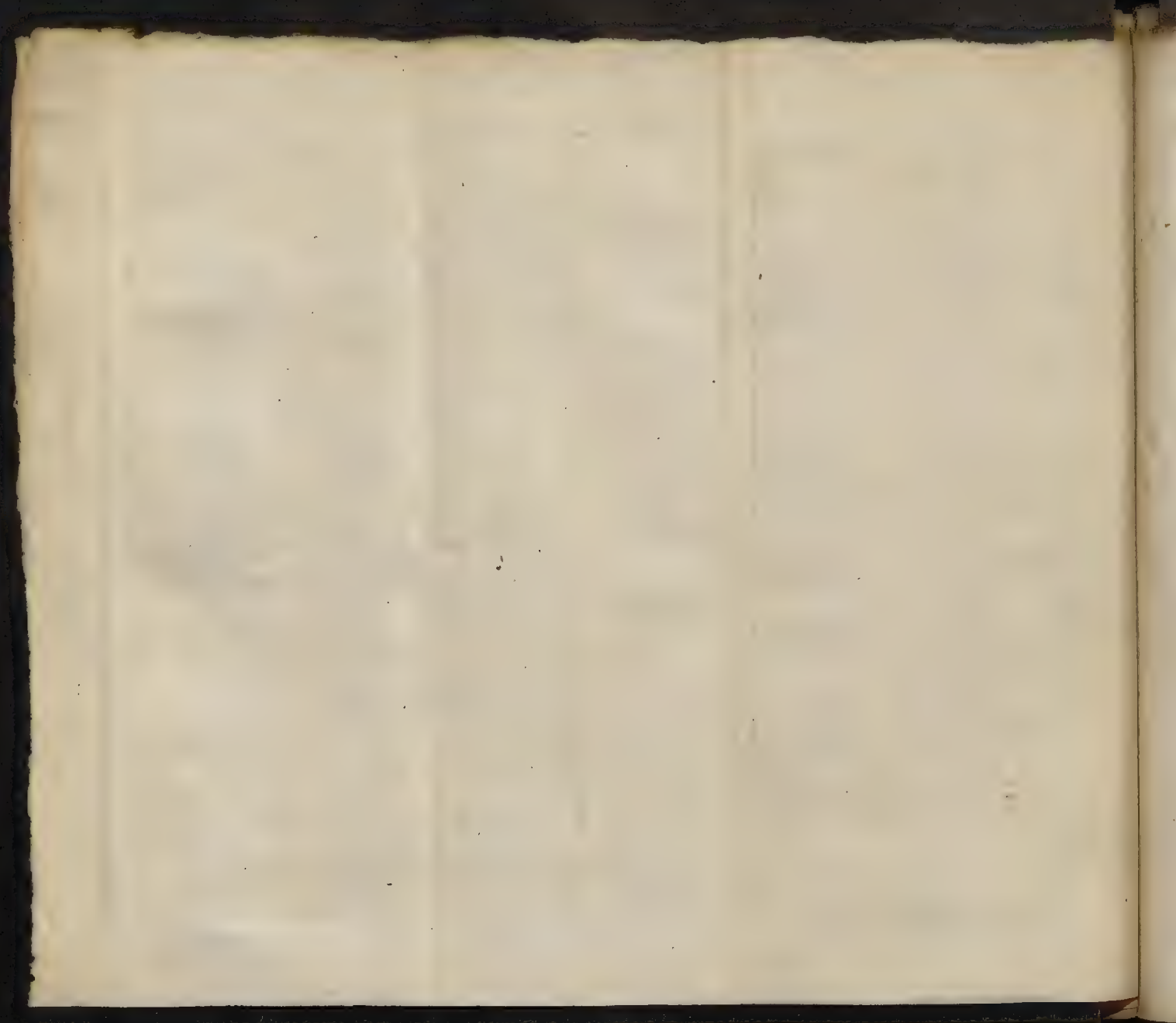
Fig. de Cygne. sec. Vmno.

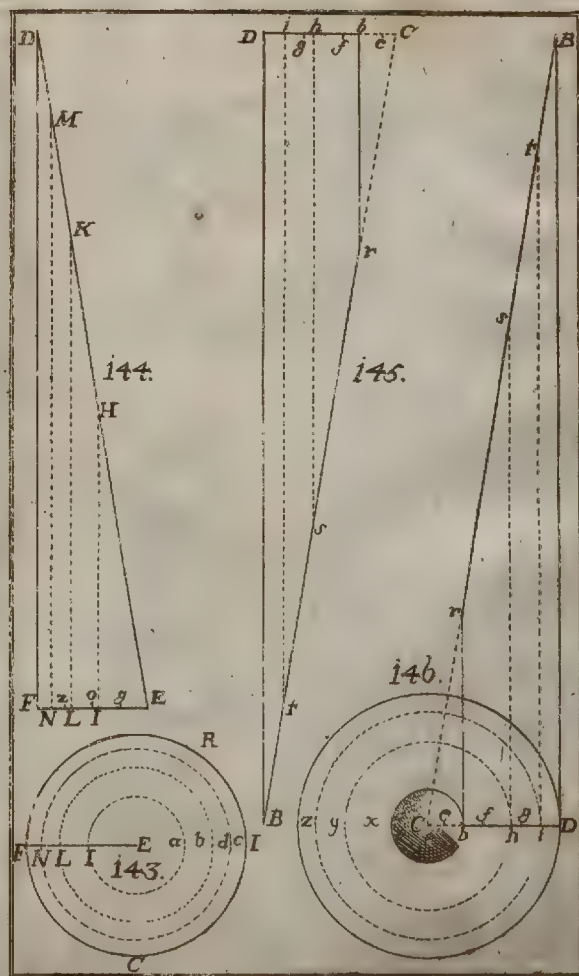
Geom. Tab. X.





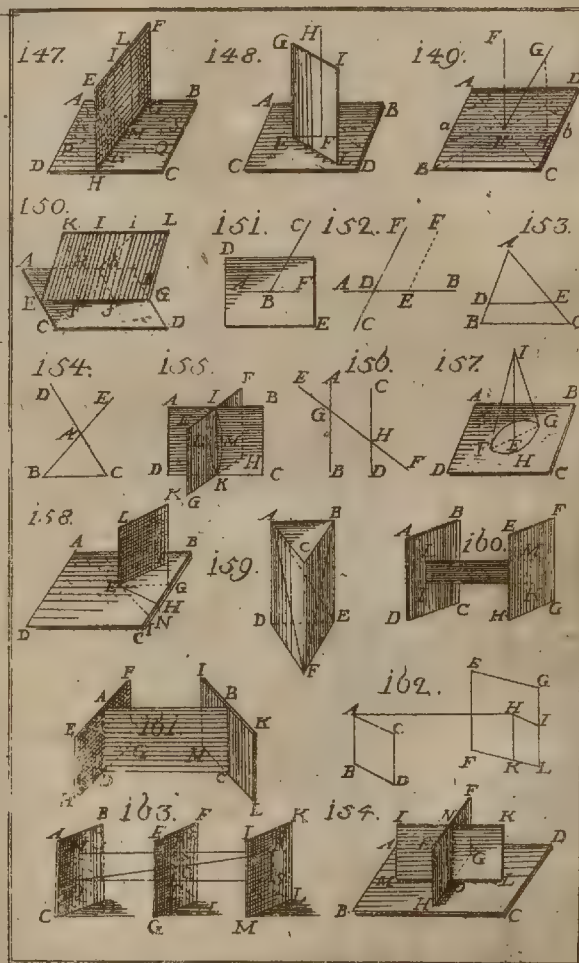
Geom. Tab. XI.



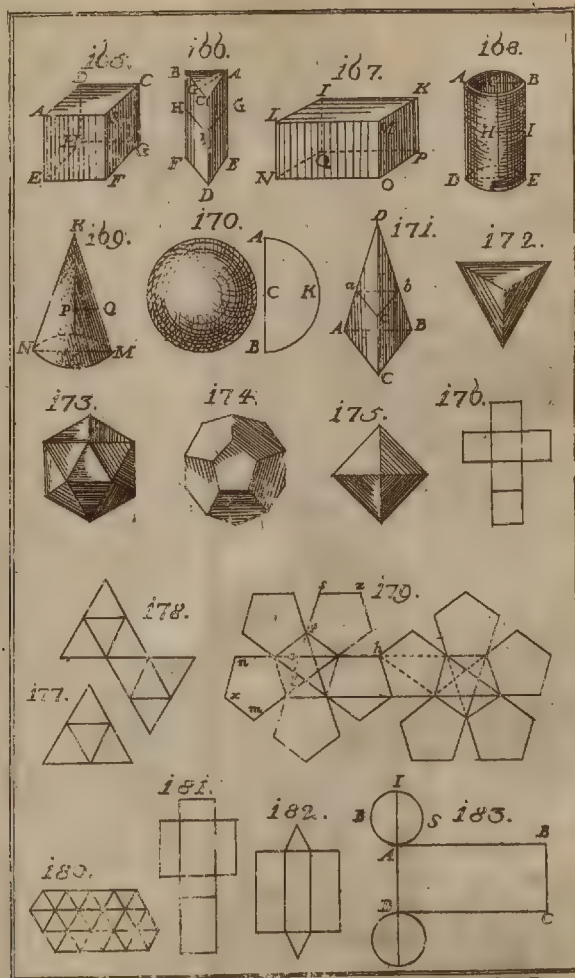


Geom. Tab. XII.



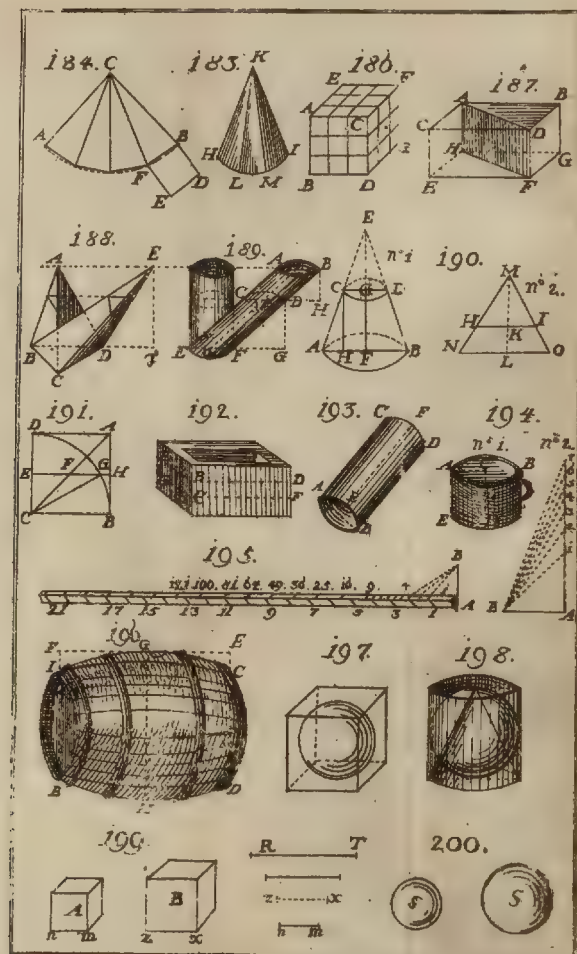






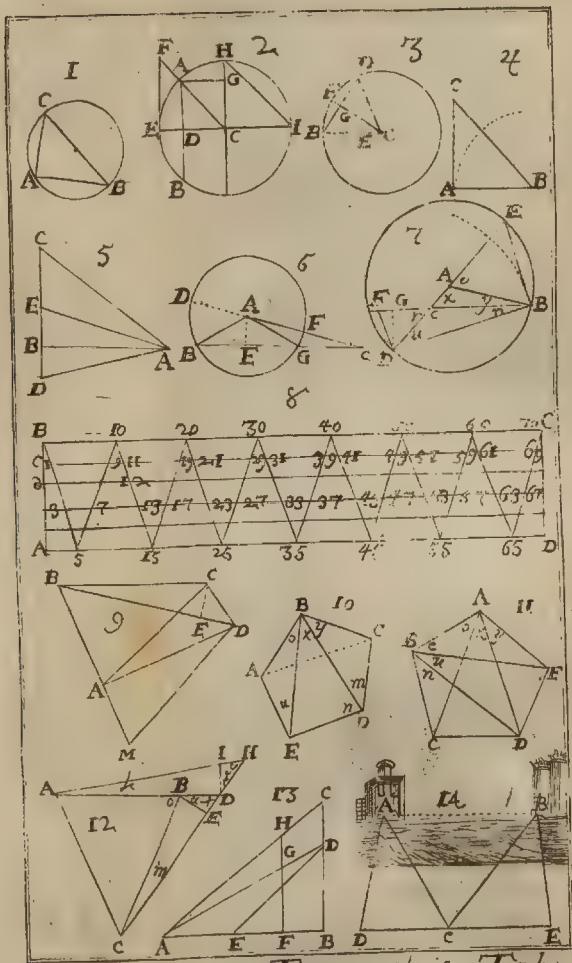
Geom. Tab. XIV.





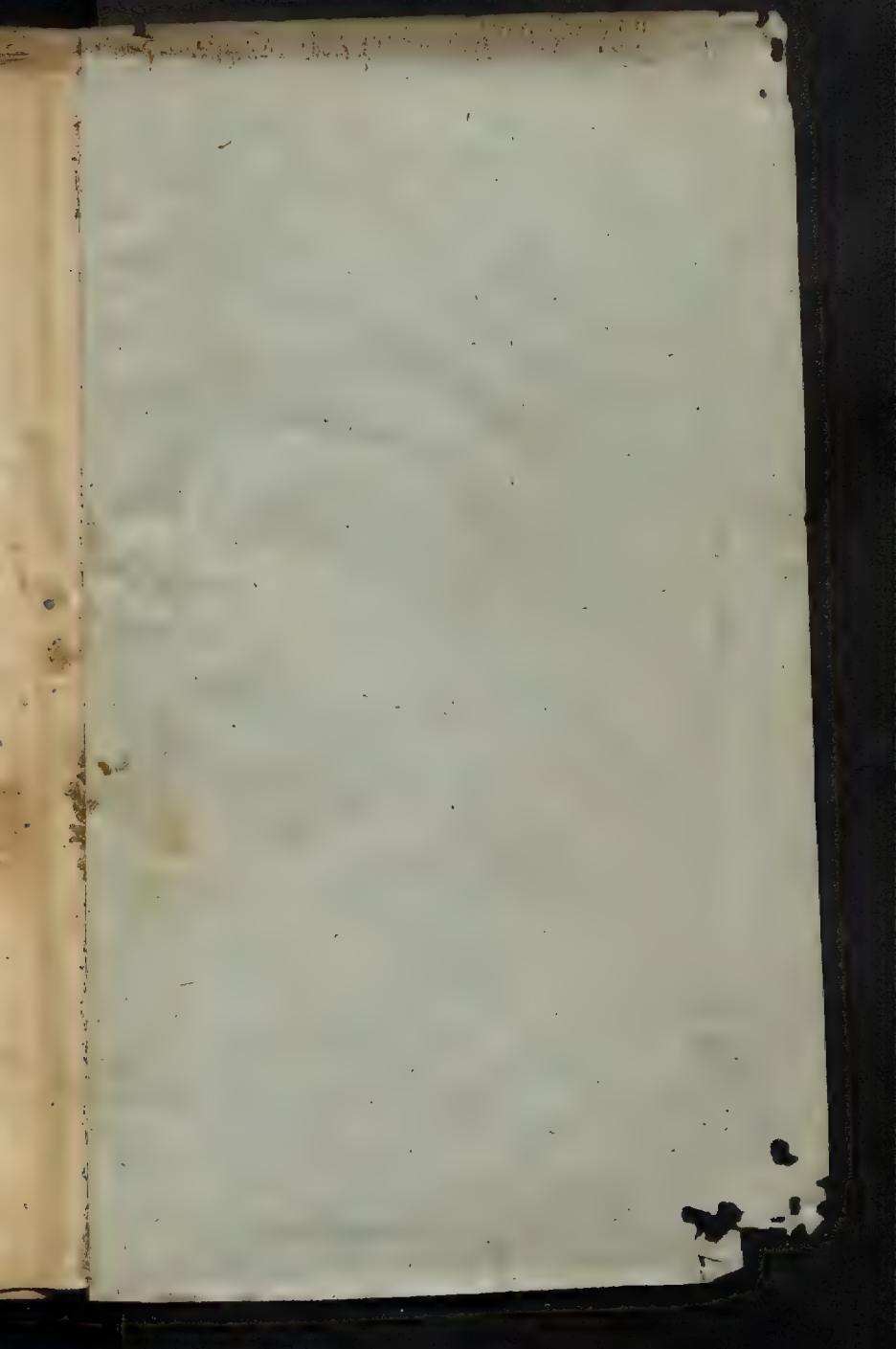
Geom. Tab. XV.

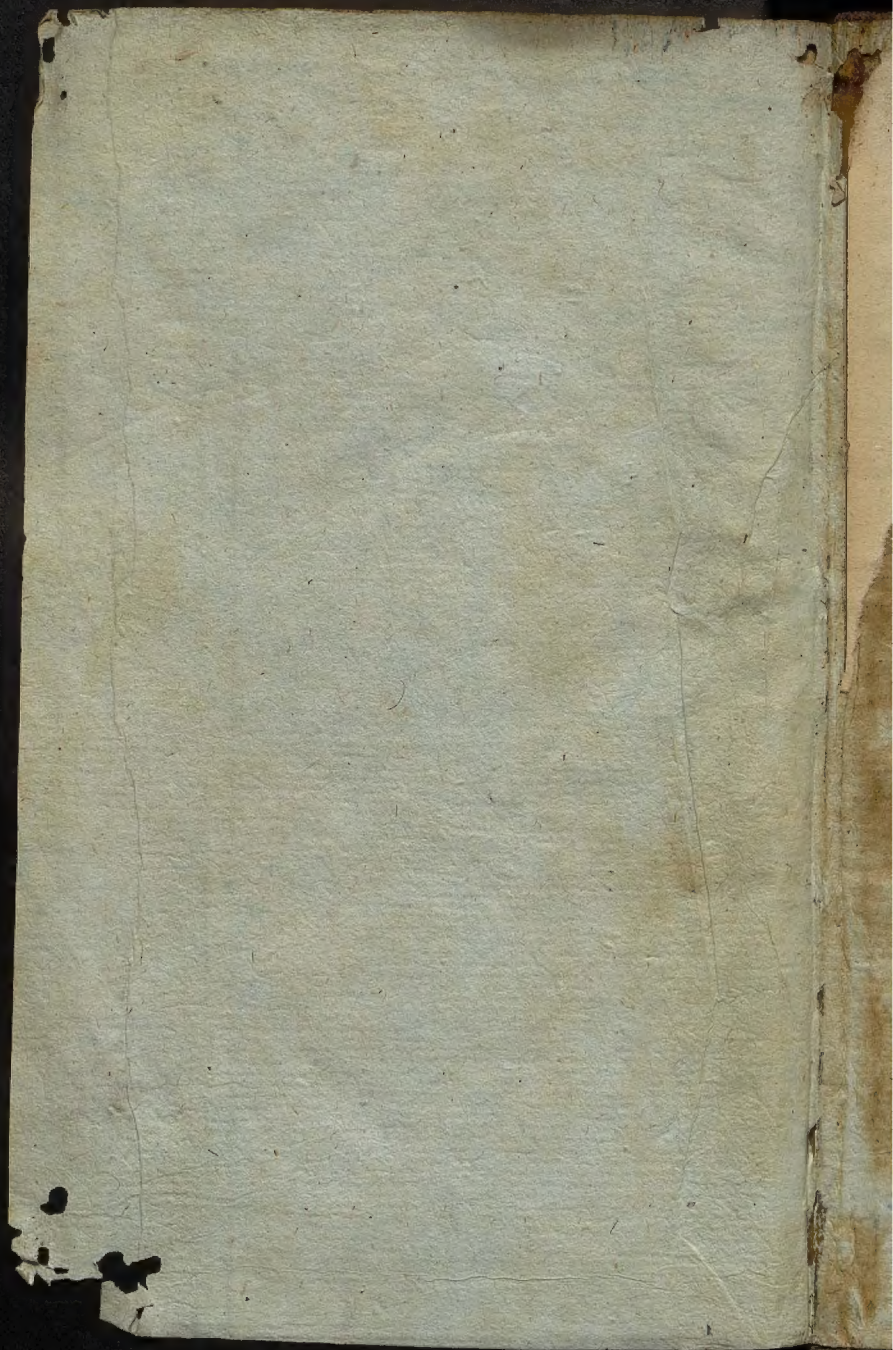




Trigonometria Tab.







Biblioteka Jagiellońska



stdr0027074



27

C.
#35